МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

ЛОГІСТИКА.
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

для студентів денної та заочної форм навчання
напряму підготовки 0701 Транспортні технології

Дніпропетровськ
2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра управління на транспорті

ЛОГІСТИКА.
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ
ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ

для студентів денної та заочної форм навчання
напряму підготовки 0701 Транспортні технології

Дніпропетровськ
ДВНЗ «НГУ»
2012

Логістика. Методичні рекомендації до виконання індивідуального завдання для студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки 0701 Транспортні технології / П.І. Когут, М.А. Кучерява. – Д.: Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», 2012. – 29 с.

Автори:
П.І. Когут, проф.
М.А. Кучерява, асист.

Затверджено до видання редакційною радою НГУ (протокол №2 від 21.02.2012) за поданням методичної комісії напряму підготовки 0701 Транспортні технології (протокол № 2 від 23.01.2012).

Відповідальний за випуск завідувач кафедри управління на транспорті, канд. техн. наук, доц. І.О. Таран.

Друкується у редакційній обробці авторів.

Зміст

Вступ

Однією з важливих задач перспективного планування є раціональне розташування транспортних підприємств по відношенню до існуючої мережі пунктів споживання, підприємств виробництва, та системи складського господарства. Зазвичай ця проблема повязана з тим фактом, що значна доля товарів (як промислової так і харчової продукції), яка підлягає перевезенню від місць виробництва до пунктів призначення (споживання), повинна бути попередньо доправленою на склади чи розподільчі бази для їх сортування, попередньої обробки тощо. Означену проміжну роль складів та баз можуть брати на себе перевантажувальні станції, контрейлерні пункти, порти і т.п. В зв’язку з цим важливого значення набуває проблема оптимальної взаємодії постачальників, споживачів та пунктів попередньої обробки та зберігання. Отже, однією з основних проблем є логістичний аналіз наступної ситуації: "з якого підприємства на який склад" і "з якого складу якому споживачу" слід відправити продукцію так, щоби сукупні затрати на доставку товарів були б мінімальними. Таким чином, при виборі місць для розташування пунктів виробництва, складських приміщень, баз та перегрузочних станцій, необхідно враховувати затрати як на перевезення сировини, готової продукції, так і вартість за ї ї зберігання та попередню обробку на складах чи розподільчих базах. Одним із можливих підходів до розв’язання такої проблеми грунтується на залучення мережевої моделі двоетапної транспортної задачі.

Серед сучасних методів оптимізації і планування транспортних процесів значна роль належить мережевим методам. Особливо це стосується тих транспортних задач, які мають цілком природну інтерпретацію як мережеві задачі. Зазвичай вони пов’язані з певною мережею транспортних маршрутів (автомобільних доріг, залізничних сполучень, водяних шляхів, маршрутів повітряних трас тощо.

1. Транспортні мережі. Основні поняття

Означення 1. ***Графом*** *ξ будемо називати будь-яку систему відрізків, у певний спосіб з'єднаних між собою. Названі відрізки, якщо їм приписано напрям, називатимемо* ***дугами графа****, інакше -* ***його ребрами****. Точки, що є кінцями або початками дуг (чи відрізків) графа, називаються вершинами графа.*

Кожна з вершин графа ξ позначається певним номером (натуральним числом: $1, 2, 3, \ldots$). Дуги графа надалі позначатимемо як впоядковані пари (i, j). Отже кожній дузі відповідає впорядкована паравершин (i, j), де перший індекс i означає початок дуги, а другий індекс j − її кінець (див рис. 1). Такі вершини, надалі, називатимемо суміжними або інцидентними. Відповідно ребра графа (ненапрямлені відрізки) позначатимемо символом $[i, j]$.

Означення 2. ***Шляхом*** *у графі називається послідовність дуг $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), (i_3, i_4), \ldots, (i_k-1, i_k)\}$, кінець кожної з яких збігається з початком наступної, окрім останньої.*

Шлях надалі позначатимемо послідовністю вершин, через які він проходить, тобто $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$.

Означення 3. ***Контуром*** *називається шлях $\{i_1, i_2, \ldots, i_k, i_i\}$, початкова вершина якого збігається з кінцевою.*

Означення 4. ***Граф*** *F називається сильно зв'язаним, якщо будь-які його дві вершини i і j можна з'єднати шляхом, що йде з i в j.*

Якщо в означеннях 2–4 поняття дуги замінити на поняттям ребра, то дістанемо означення ланцюга, циклу, та зв'язаності графа, відповідно. Легко збагнути, що ребра дуг, які утворюють шлях і контур, завжди утворюють ланцюг і цикл, проте зворотне твердження є не вірним.

1. Транспортні мережі. Основні поняття

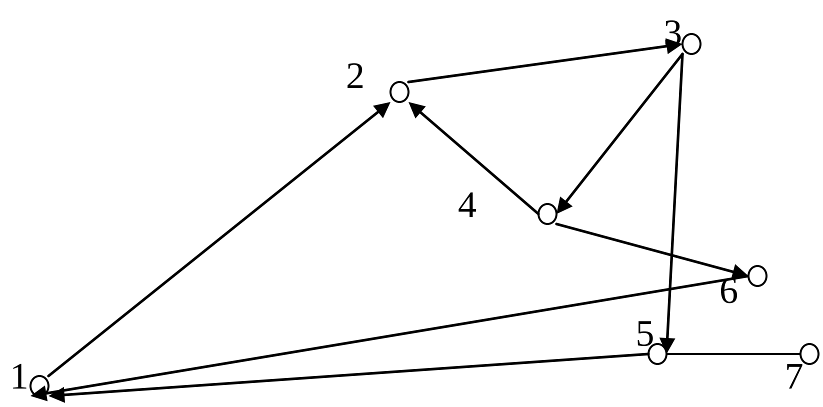

Рис. 1.1. Приклад графу

Означення 5. ***Деревом*** *називається граф, який не має циклів і в якому кожна пара вершин зв'язана між собою деяким ланцюгом ребер.*

Означення 6. ***Транспортною мережею*** *M будемо називати довільний граф ξ, складовим якого (дугам, вершинам, ребрам) поставлені у відповідність певні параметри, що визначають їх властивості.*

При цьому вершини такого графу утотожнюються з станціями, пунктами відправки товарів, базами, складами тощо, а дуги чи ребра графу являють собою шляхи сполучень між суміжними пунктами.

Надалі довільну транспортну мережу будемо утотожнювати з наступною сукупністю об'єктів:

$$M = (\xi, A, C, D, R_b, P_p, D_t)\ ,$$

де позначено:

(a) ξ − граф, що являє остов транспортної мережі, або шляхи сполучення між станціями;

(b) A − множина вершин графу, яка допускає декомпозицію

$$A = A_b \cup A_t \cup A_p$$

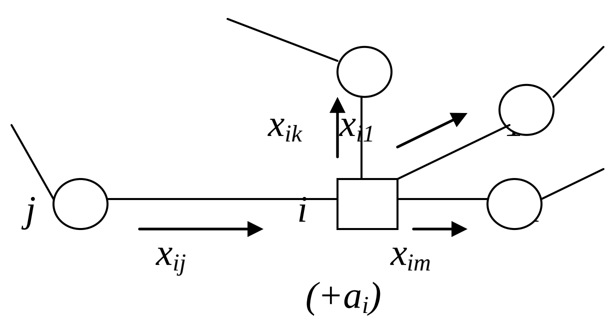

Рис. 1.2. Фрагмент транспортної мережі з товарними потоками

в якій A_b є множиною станцій відправників товару, A_t транзитні станції (склади, перевалочні пункти, сортувальні пункти), і A_p – пункти призначення

(c) $C = \{C_{i\,j}\}$ − масив значень вартостей перевезень (відстаней, часових затрат) між суміжними станціями (тут C_{ij} – вартість перевезення одиниці вантажу від станції i до станції j);

(d) $D = \{d_{ij}\}$ − масив числових значень пропускних спроможностей шляхів сполучень між суміжними станціями (наприклад, d_{ij} – максимальна кількість однорідного вантажу, який водночас може бути перевезений від станції *i* до станції *j*);

(e) $R_b = \{R_i \colon \forall_i \in A_b\}$ − обсяги продукції на станціях-відправниках, що підлягають перевезенню;

(f) $P_p = \left\{ P_{i\cdot}^{\cdot} \forall_i \in A_p \right\}$ – обсяги потреб в продукції на станціях призначення;

(g) $D_t = \left\{ D_{i\cdot}^{\cdot} \forall_i \in A_t \right\}$ – пропускна здатність транзитних станцій, або інакше, обсяги продукції, які можуть прийняти на збереження чи попередню переробку склади сортувальні станції.

Для ілюстрації наведемо фрагмент транспортної мережі, в якій пункт з номером *i* відправляє груз в кількості a_i тон (див. рис.2).

Надалі довільну транспортну мережу будемо дотримуватися наступних позначень: станцію-відправник товару виділятимемо квадратною рамкою, станцію призначення – кружечками з номерами станцій всередині, решта станцій – трикутними рамками.

2. Математична постановка двоетапної транспортної задачі

Як зазначалося вище, типовою ситуацією в транспортному менеджменті є наявність численних технологічних ланцюгів, які включають підприємства, що добувають сировину, пункти, які виконують різні стадії обробки такої сировини, і пункти, де споживається готова продукція.

Отже, оптимальне розташування означених підприємств та пункті попередньої обробки повинно доставляти мінімум не лише загальних транспортних затрат, але мінімізувати затрати, які пов’язані із складськими операціями. В зв’язку з цим введемо наступні припущення.

Нехай масив підприємств-відправників A_b містить *m* станцій:

$$\{A_b,1,A_b,2,\ldots,A_{b,m}\}$$

з наявними ресурсами продукції, що підлягає відправленню, відповідно.

$$R_b = \{R_1,R_2,\ldots,R_m,$$

Нехай відомі також *n* станцій-призначення:

$$A_p = \{A_{p,1},A_{p,2},\ldots,A_{p,n}\},$$

потреба в готовій продукції на яких відповідно дорівнює:

$$P_p = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}.$$

Окрім цього вважатимемо, що на шляху до споживачів кожна одиниця продукції повинна бути завезена на один із складів:

$$A_t = \{A_{t,1},A_{t,2}, \ldots ,A_{t,r}\}$$

потужності (місткість) яких відповідно дорівнюють:

$$D_t=\{D_1,D_2, \ldots ,D_r\}.$$

Нехай c_{ik} заздалегідь обчислені затрати на перевезення одиниці продукції від довільного відправника $A_{b,i}$ на довільний склад $A_{t,k}$;

c_{kj} – затрати на перевезення одиниці продукції зі складу $A_{t,k}$ до споживача $A_{p,j}$; s_k – затрати, що пов’язані із зберіганням та попередньою обробкою одиниці продукції на складі $A_{t,k}$.

Вважатимемо, що сумарна потужність складів не може бути меншою наявної кількості продукції, яка підлягає перевезенню, тобто:

$$\sum_{K=1}^{r} D_k \geq \sum_{i=1}^{m} R_i$$

В свою чергу загальна потужність відправників продукції не може бути меншою від сукупних потреб в готовій продукції:

$$\sum_{i=1}^{m} R_i \geq \sum_{j=1}^{n} P_j$$

Надалі вважатимемо (для простоти), що задача є збалансованою, тобто виконується співвідношення:

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = \sum_{i=1}^{m} R_i \tag{2.1}$$

Нехай є заданою транспортна мережа, яка пов’язує між собою станції-відправники, склади та станції призначення. Припускається, що така мережа не містить ребер (чи дуг), які на пряму пов’язують станції-відправників зі станціями призначення готової продукції. Такий зв’язок є опосередкованим, принаймі через один із складів (див рис. 2.1).

Пов’яжемо з кожним ребром *[i,j]* транспортної мережі деякий обсяг перевезень x_{xj}. В результаті, транспортній мережі можна поставити у відповідність масив значень $X=\{x_{xj}\}$, який називатимемо планом перевезень.

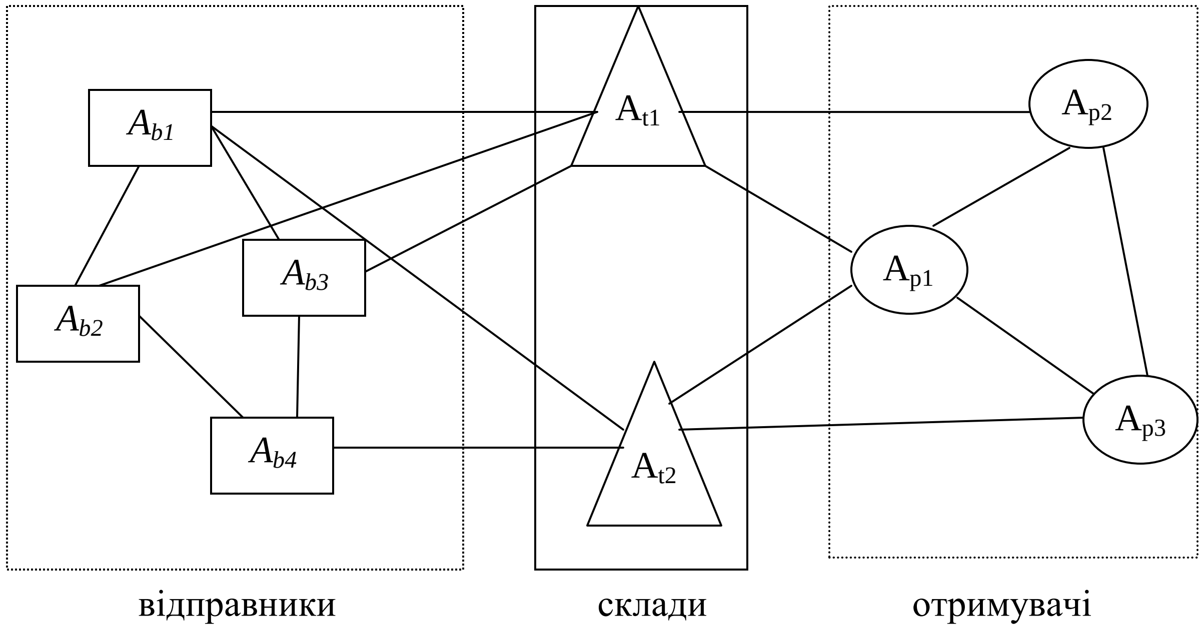

Рис. 2.1. Транспортна мережа в двоетапній задачі

Оскільки задача полягає в забезпеченні станцій призначення певним обсягом продукції, яка повинна бути перевезена від станцій-відправників з обов'язком перерозподілом на складах, то величини x_{ij} не можуть набувати довільних значень, а повинні підкорятися певній системі обмежень (див. рис. 2). Зокрема, нехай x_{ik} − це обсяг поставок від станції-відправника A_b, і на склад $A_{t,k}$ (за умови, що в транспортній мережі існує ребро *[i,k]*, яке їх поєднує). Нехай x_{kj} − обсяг поставок з складу $A_{t,k}$ до станції призначення $A_{p,j}$.

Тоді:

1) на кожному ребрі *[i, j]* заданої транспортної мережі виконується умова невід'ємності перевезень та обмеження щодо пропускної здатності:

$$0 \le x_{ij} \le d_{ij} \qquad (2.2)$$

2) кожна із станцій призначення $A_{p,j}$ повинна отримати продукцію в обсязі, який в точності дорівнює її потребам P_j , тобто:

$$\sum_{k \in P_j^-} x_{kj} - \sum_{l \in P_j^-} x_j l = P_j, \forall\ j = 1,...n. \qquad (2.3)$$

Тут через $P_j^{вх}$ − позначаємо масив номерів тих станцій (складів), які є інцидентами з станцією A_{pj}. а через $P_j^{вх}$ − масив тих станцій (окрім складів), з якими є інцидентною станція $A_{p,j}$. Іншими словами, оскільки $A_{p,j}$ може виступати в ролі транзитної станції на шляху від складів до решти пунктів призначення, то співвідношення (2.2) означає, що різниця між обсягами отриманої продукції і відправленої далі по станції $A_{p,j}$ повинна дорівнювати її потребі P_j.

3) кожна із станцій-відправників $A_{b,i}$ повинна вивезти свою продукцію в повному обсязі, що означає наступне:

$$\sum_{l \in R_i^-} x l_i + R_i = \sum_{k \in R_i^-} x_i k, \forall_i = 1,\ldots,m \tag{2.4}$$

Тут $R_i^{вх}$ є масивом тих станцій-відправників, які є інцидент ними з $A_{b,i}$ (тобто вони можуть використовувати A_b, і як транзитну станцію), а через $R_i^{вих}$позначено сукупність пунктів призначення (складів), з якими станція A_b, і є інцидентною;

4) обсяг продукції, яка поступає на кожен склад не може перевищувати його максимальної потужності:

$$\sum_{i \in D_k^-} x_{ik} \le D_k, \forall_i = 1,\ldots,m \tag{2.5}$$

Тут $D_k^{ВХ}$ − сукупність станцій-відправників, що є інцидент ними з складом $A_{t,k}$;

5) загальний обсяг продукції, яка поступає на кожен із складів $A_{t,k}$, повинен бути повністю вивезеним з цього складу, тобто:

$$\sum_{i \in D_k^-} x_{ik} = \sum_{j \in Dk^-} x_{kj}, \forall_i = 1,\ldots,m \tag{2.6}$$

Означення 7. *Будемо казати, що план перевезень X={xij} є припустимим, якщо для нього виконуються умови (2.2) – (2.6). Множину всіх припустимих планів позначатимемо як M.*

Для того, щоб навести математичну постановку двоетапної транспортної задачі, формалізуємо сумарні фінансові затрати, які пов’язані з довільним припустимим планом перевезень $X \in M$. Нехай c_{ik} − затрати на перевезення одиниці продукції від станції-відправника $A_{b,i}$ на склад $A_{t,k}$ чи транзитну станцію $A_{b,k}$ (за умови, що в транспортній мережі існує ребро $[i,k]$, яке їх поєднує). Нехай S_k – затрати на поставку одиниці продукції з складу $A_{t,k}$ чи транзитної станції $A_{p,k}$ до станції призначення $A_{p,j}$. Нехай S_k – затрати на зберігання та попередню обробку одиниці продукції на складі $A_{t,k}$. В результаті,

- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{k \in R_i^-} C_{ik} x_{ik}$ − сума затрат на перевезення продукції на склади;

• $\sum_{k=1}^{r}\sum_{j\in \bar{D}_k} C_{kj}x_{kj} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l\in p_j} C_{jl}x_{ij}$ − сума затрат на перевезення продукції з складів до станції призначення;

• $\sum_{k=1}^{r} S_k(\sum_{i\in D_k} x_{ik})$ − затрати на переробку та зберігання продукції на складах.

Отже, сумарні затрати, які пов'язані з залученням плану перевезень X ∈ M, даються формулою

$$l(x)\sum_{i=1}^{m}\sum_{k\in D_i} C_i k + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j\in D_k} C_{kj}x_{kj} + \sum_{j=1}^{n}\sum_{l\in p\bar{j}} C_j lx_j + \sum_{k=1}^{r} S_k(\sum_{i\in I_k} x_{ik}) \tag{2.7}$$

Таким чином, двоетапна транспортна задача полягає в пошуку такого припустимого плану перевезень X^{opt} ∈ M, при якому показник оптимальності (2.7) (сумарні затрати) досягає свого найменшого можливого значення, тобто

$$I(X_{opt}) = \min_{X\in M} I(X) \tag{2.8}$$

Надалі казатимемо, що задача (2.8) є регулярною, якщо при існуючих обмеженнях на пропускну здатність транспортної мережі множина припустимих планів перевезень є непустою.

Будемо розрізняти наведену задачу для випадку, коли сумарна потужність складів дорівнює загальній потребі в продукції на станціях призначення, тобто коли $\sum_{k=1}^{r} D_k = \sum_{i=1}^{n} P_i$ для випадку коли склади можуть вмістити більшу кількість продукції, тобто $\sum_{k=1}^{r} D > \sum_{i=1}^{n} P_i$. У першому випадку кожен із складів повинен повністю використати свої потужності, якою б не була схема перевезення вантажу від виробників до споживачів. За цієї причини перевезення продукції зі складів до станцій призначення можна оптимізувати в не залежності від способу закріплення складів за станціями-відправниками. В результаті, вихідна задача розпадається на дві незалежних задачі:

(А) Перевезти продукцію зі станцій $\{A_{b,1}, A_{b,2}, \dots, A_{b,m}\}$ в обсязі $\{R_1, R_2, \dots, R_m\}$, відповідно, на склади $\{A_{t,1}, A_{t,2}, .., A_{t,r}\}$ в кількості $\{D_1, D_2, \dots, D_r\}$ так, щоб сукупні транспортні затрати на доставку були мінімальними, тобто:

$$I_A(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k\in Di} C_{ik}X_{ik}$$

(В) Перевезти продукцію з складів $\{A_{t,1},A_{t,2}, . . . ,A_{t,r}\}$ в обсязі $\{D_1,D_2, . . .,D_r\}$, відповідно, на станції призначення $\{A_{p,1},A_{p,2}, . . . ,A_{p,n}\}$ в кількості $\{P_1, P_2, . . . , P_n\}$ так, щоб сукупні транспортні затрати на доставку були мінімальними, тобто:

$$I_B(X) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j\in p} C_{kj} X_{kj} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{j\in p_j} C_{jl} X_{jl} \to min \tag{2.10}$$

Зауважимо, що в цьому випадку величини $(\sum_{i\in I_k} X_{ik})$ є сталими для кожного із складів, а саме $(\sum_{i\in I_k} X_{ik}) = D_k$ Отже, вираз $\sum_{k=1}^{r} S_k(\sum_{i\in I_k} X_{ik}) = const$ є сталою величиною, а тому

$$min\ I(X) = min\ \{I_A(X) + I_B(X) + const\} = min\ I_A(X) + min\ I_B(X) + const.$$

У випадку, коли склади можуть вмістити більшу кількість продукції ніж ї ї загальна наявність на станціях-відправниках $(тобто \sum_{k=1}^{r} D_k > \sum_{i=1}^{n} P_i),$ двоетапну задачу доставки продукції через систему ї ї перевантаження на складах потрібно розв’язувати в комплексі. Це означає, що проблема закріплення складів за станціями-відправниками і станціями призначення є взаємопов’язаною і повинна розв’язуватися як єдине ціле. З цією метою всі склади долучаються як до системи поставщиків (станцій відправлення продукції) так і до системи споживачів (станції призначення). При такому дублюванні, кожен склад заміняють парою вершин на мережі, яка з’єднується між собою ребром, вартість проїзду за яким дорівнює вартості зберігання на відповідному складі, а його пропускна здатність приймається рівною потужності відповідного складу. При такій модифікації приходимо до класичної постановки транспортної задачі на мережі, яку зазвичай розв’язують методом потенціалів.

3. Необхідні умови оптимальності в двоетапній транспортній задачі

Нехай $X = \{x_{ij}\}$ − довільний припустимий план перевезень в двоетапній транспортній задачі (2.8).

Означення 8. Будемо казати, що в транспортній мережі:

$$M = (\Im, A, C, D, R_b, P_p, D_t) \tag{3.1}$$

при плані перевезень $X=\{x_{ij}\}$ ребро $[i, j]$ є:

1) вільним, якщо $x_{ij}=0$;

2) зайнятим, якщо $0 < x_{ij} < d_{ij}$ (тобто їх пропускна здатність використана не повністю);

3) перенасиченим, якщо $x_{ij}=d_{ij}$ (максимальна пропускна здатність ребра вичерпана).

Означення 9. *Припустимий план перевезень називають невиродженим, якщо кількість зайнятих ребер складає $N=m+n+k-1$ одиниць, де m – кількість станцій-відправників, n – кількість станцій призначення, і k - кількість складів. Інакше, план називають виродженим. Перевезення, яке приходиться на зайняте ребро, називають базисним.*

З теорії графів відомо, якщо граф з $N+1$ вершиною є деревом, то він містить N ребер. Отже, та частина транспортної мережі, яка утворена зайнятими ребрами, являє собою дерево, тобто це зв'язний граф, який не містить замкнутих контурів (циклів). Для перевірки невиродженого плану на оптимальність необхідно скористатися наступним критерієм: план $X=\{x_{ij}\}$ є оптимальним в задачі (2.8) тоді і тільки тоді, коли кожній вершині мережі можна поставити у відповідність числа v_i (далі потенціали), які б задовольняли таким умовам:

$$V_s - V_q \le C_{sq}, якщо\, X_{sq} = 0; \tag{3.2}$$

$$V_s - V_q = C_{sq}, якщо \;\; 0 \le X_{ij} \le d_{ij} \tag{3.3}$$

$$V_s - V_q \ge C_{sq}, якщо\, X_{ij} = d_{ij} \tag{3.4}$$

У випадку, коли вихідний план перевезень є виродженим, його безпосередня перевірка на оптимальність є неможливою (через неоднозначність у визначенні потенціалів вершин). Для цього такий план потрібно модифікувати, довівши кількість його базисних перевезень до числа $N = m + n + k - 1$ Для цього слід скористатися наступним правилом: якщо кількість базисних перевезень за цим планом є меншою ніж $N = m + n + k - 1$, то число базисних перевезень потрібно поповнити за рахунок ребер з нульовими перевезеннями, чи перенасичених ребер, проте так, щоби нові базисні ребра утворювали дерево з $N + 1$ вершиною (інакше кажучи, не допустити появи замкнутих контурів).

Якщо кількість базисних перевезень за вихідним планом є більшою ніж $N = m + n + k - 1$, то такий план містить циклічні перевезення. Подібних перевезень потрібно уникнути. Для цього визначають контур на графі з циклічними перевезеннями. Нехай він містить, принаймі, одне перенасичене ребро. Тоді на решті ребер, перевезення вдовж яких співнапрямлені з перевезенням на перенасиченому ребрі, визначають ребро з найменшим обсягом перевезень x_{min}. Далі, на усіх ребрах, через які іде потік продукції у обраному вище напрямку, обсяги перевезень зменшують на величину x_{min}, в той час як на решті ребер (що відповідають зустрічним перевезенням) їх обсяги збільшують на цю ж величину. При цьому, величину x_{min} потрібно брати меншою, якщо виникає конфлікт з порушенням пропускної спроможності на зустрічних перевезеннях. В результаті таких перетворень, на обраному контурі з'являється, принаймі, одне ребро з нульовим перевезенням. Тим самим, циклічне перевезення прибрано. Після цього потрібно повернутися до перевірки нового плану на невиродженість.

4. Метод потенціалів на транспортній мережі

Наведемо алгоритм розв'язання двоетапної задачі на мережі виходячи з методу потенціалів. Дляцього вихідну мережу, яка відповідає поставленій задачі дооснастимо наступними позначеннями. Біля кожного ребра транспортної мережі поставимо через дріб показник вартості перевезення вздовж цього ребра і його пропускну здатність c_{ij}/d_{ij} . Біля кожної станції-відправника (вершина графу у вигляді квадратної рамки) проставимо обсяг наявної продукції в дужках із знаком плюс (див. рис. 4). Обсяги продукції, яку належить доставити на станції призначення (вершини мережі у вигляді кружечків), проставляються під відповідними вершинами в дужках із знаком мінус (див. рис. 5).

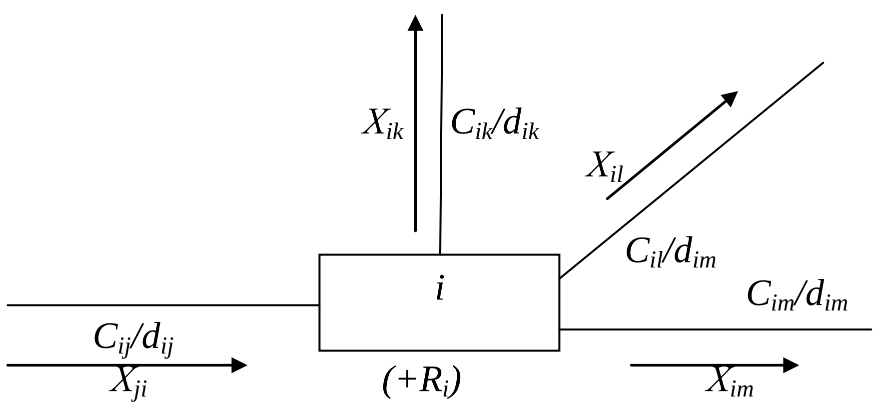

Рис. 4.1. Фрагмент транспортної мережі

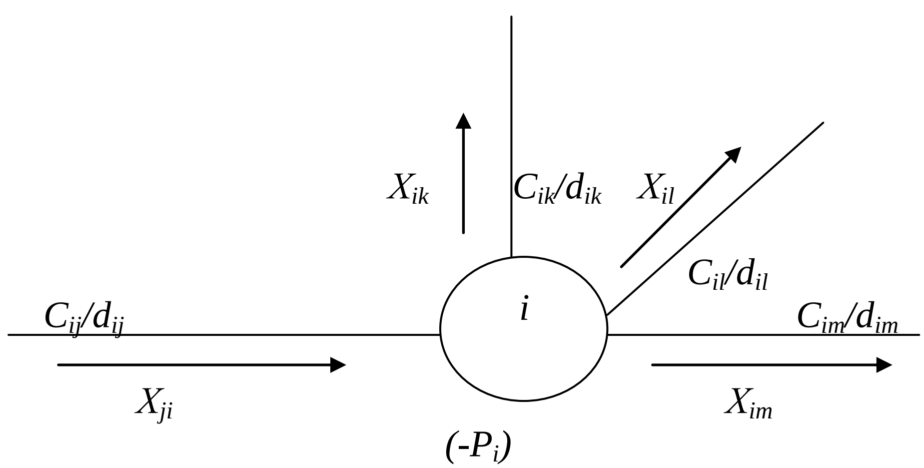

Рис. 4.2. Фрагмент транспортної мережі

Наведемо алгоритм розв’язання поставленої задачі за методом потенціалів.

(S1) На цьому етапі будується початковий план перевезень: напрями відповідних вантажопотоків показуються стрілками, а обсяги вантажів – числом над відповідною стрілкою (див. рис. 4–5). Наприклад, розглянемо двоетапну задачу, яка задана мережею на рис. 6. Додатково вважатимемо, що вартість зберігання на складах A_{t1} та A_{t2} відповідно дорівнює 15 та 20 умовних одиниць за

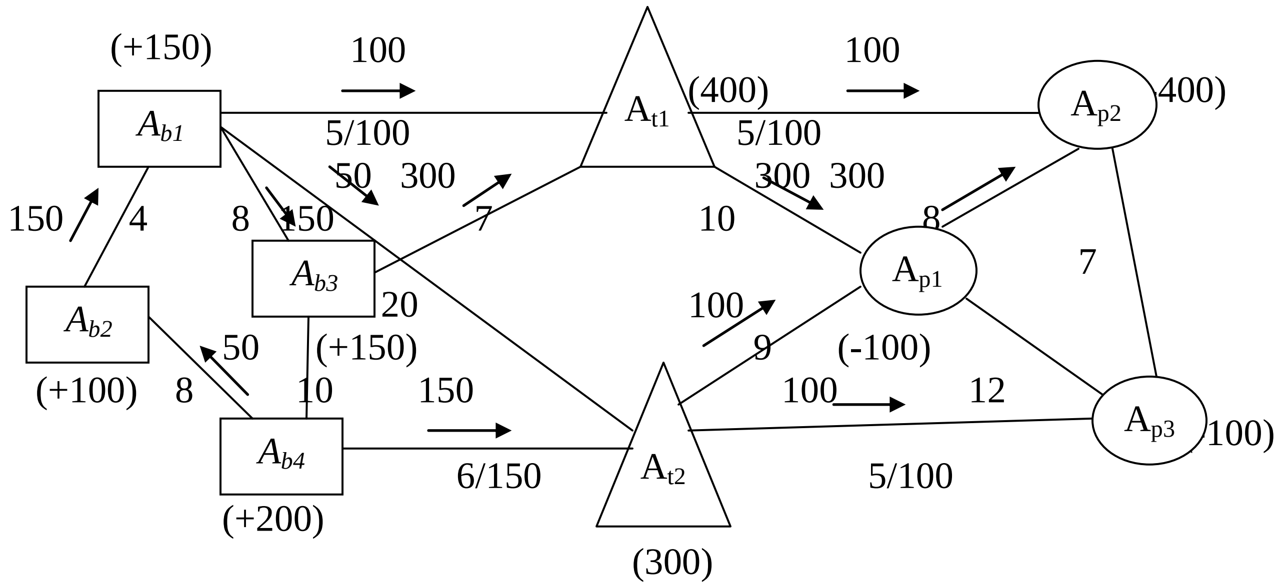

Рис. 4.3. Приклад двоетапної транспортної задачі одиницю продукції

(S2) Цей крок торкається перевірки запропонованого плану перевезень на невиродженість (див. означення 9). Якщо план є невиродженим, то перейти на крок 3. Інакше, план підлягає корегуванню, як це зазначено в попередньому розділі. Зокрема, як видно із прикладу на рис. 6, план включає 9 зайнятих (базисних) ребер, що є більшим ніж "кількість вершин графу 9 мінус 1". Отже, план вироджений. Значить він містить циклічні перевезення. Легко бачити, що таким циклом є $\{Ab_1,At_2,Ab_4,Ab_2\}$. Оскільки цей цикл включає одне перенасичене ребро $[At_2,Ab_4]$, то обираємо $x_{min}=min\{150\}=150$. Тоді, корегуючи перевезення вздовж обраного циклу, приходимо до нового плану (див. рис. 7).

(S3) На цьому етапі потрібно кожен склад замінити парою нових вершин на мережі, яка з’єднується між собою ребром. Вартість проїзду вздовж такого ребра прийняти рівним вартості зберігання на відповідному складі, а обмеженнями на пропускну здатність виступатимуть потужності складу. Позначимо отриманий план перевезень через X_1. Оскільки при такій модифікації в плані X_1 можуть з’явитися перенасичені ребра, то його знову ж потрібно перевірити на невиродженість. Як видно з рисунку 8, саме такою є ситуація з планом X_1. Він містить лише 9 зайнятих (базисних) ребер, в той час як для його невиродженості потрібно їх мати 10. Отже, число базисних ребер потрібно розширити за рахунок або перенасичених або вільних ребер. Включимо до числа базисних ребро *[A : 't2,Ap3]*, зауваживши при цьому, що такий крок не приводить до появи замкнених циклів з числа базисних ребер.

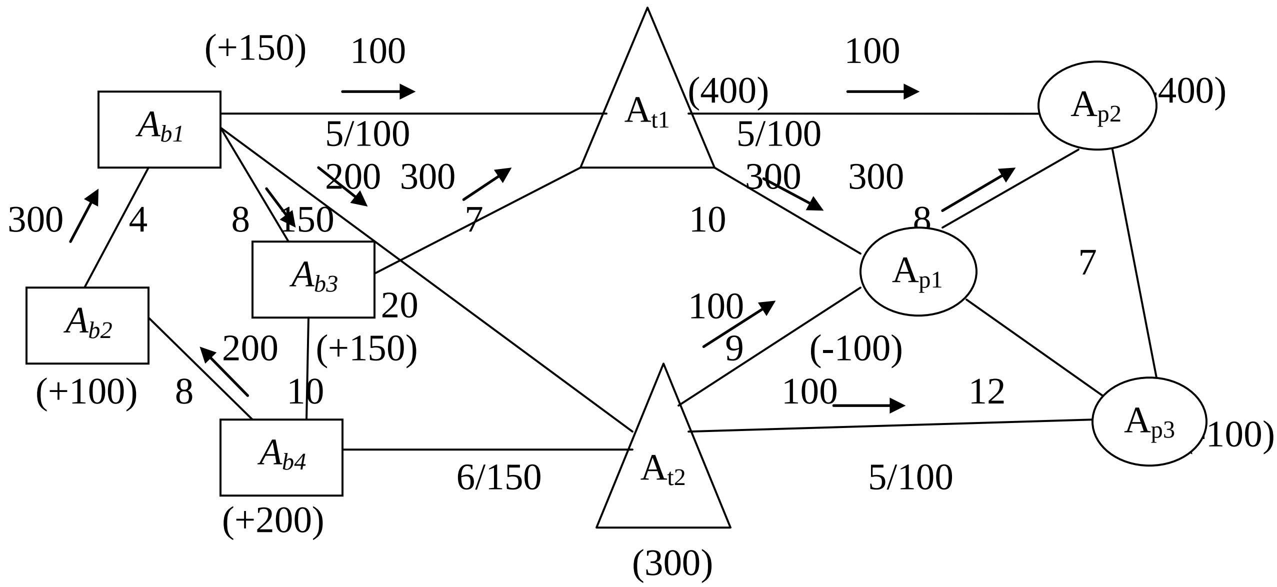

Рис. 4.4. Перше корегування початкового плану

(S4) Розрахуємо вартісні витрати на перевезення та зберігання продукції, які пов'язані з планом X_1. Маємо (див формулу (2.7))

$$I(X_1) = 300 \cdot 4 + 200 \cdot 8 + 150 \cdot 8 + 200 \cdot 20 + 100 \cdot 5 + 300 \cdot 7 + 400 \cdot 15 + 20 \cdot 20 +$$
$$+ 100 \cdot 9 + 300 \cdot 10 + 100 \cdot 5 + 300 \cdot 8 + 100 \cdot 5 = 24900\ (\textit{грошовиходиниць})$$

(S5) На цьому кроці потрібно кожній вершині мережі 8 присвоїти певний потенціал. Для цього обираємо довільну вершину мережі і присвоюємо її довільний початковий потенціал, який би був достатньо великим. Наприклад, вершині A_{b1} припишемо потенціал 50. Розрахунок потенціалів для решти вершин проводиться вдовж базисних ребер виходячи з правила

$$V_j = V_i + C_{ij}$$

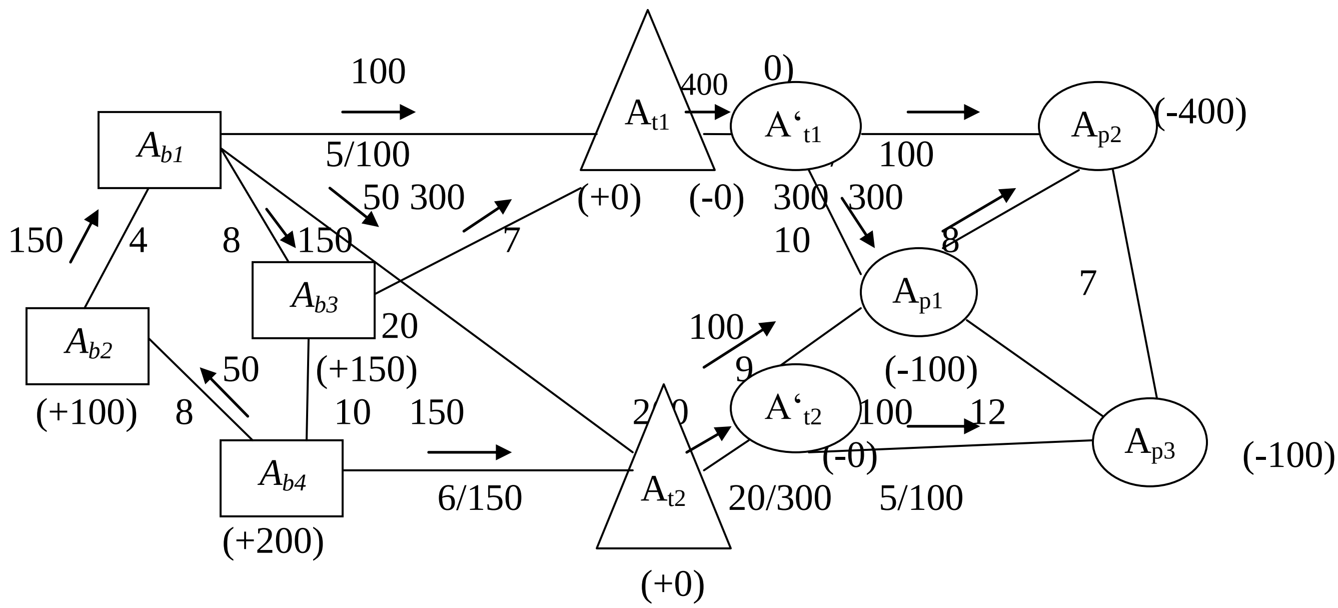

Рис. 4.5. Модифікація транспортної мережі

Це означає, що знаючи потенціал вершини i і знаючи, що вздовж базисного ребра $[i\ j]$ проходить вантажопотік в напрямку від вершини i до вершини j, потенціал осанньої збільшується на величину показника вартості перевезень c_{ij}. Якщо вантажопотік проходить в протилежному напрямі, то потенціал вершини j відповідно зменшується на величину c_{ij} . Результат такого розрахунку показано на рисунку 4.6.

(S5) Перевірка плану перевезень на оптимальність. Виходячи з критерію оптимальності (див. співвідношення (3.2)–(3.4)), для незайнятих ребер маємо наступні результати:

Таблиця 4.1

Перевірка плану на незайнятих ребрах

ребро	**потенціали**	V_i - V_j	C_{ij}	**дизбаланс**
$[A_{b3}, A_{b4}]$	58 38	20	10	10
$[A_{b4}, A_{t2}]$	38 70	32	6	26
$[A_{p1}, A_{p2}]$	99 95	4	12	+
$[A_{p3}, A_{p2}]$	107 95	12	7	5

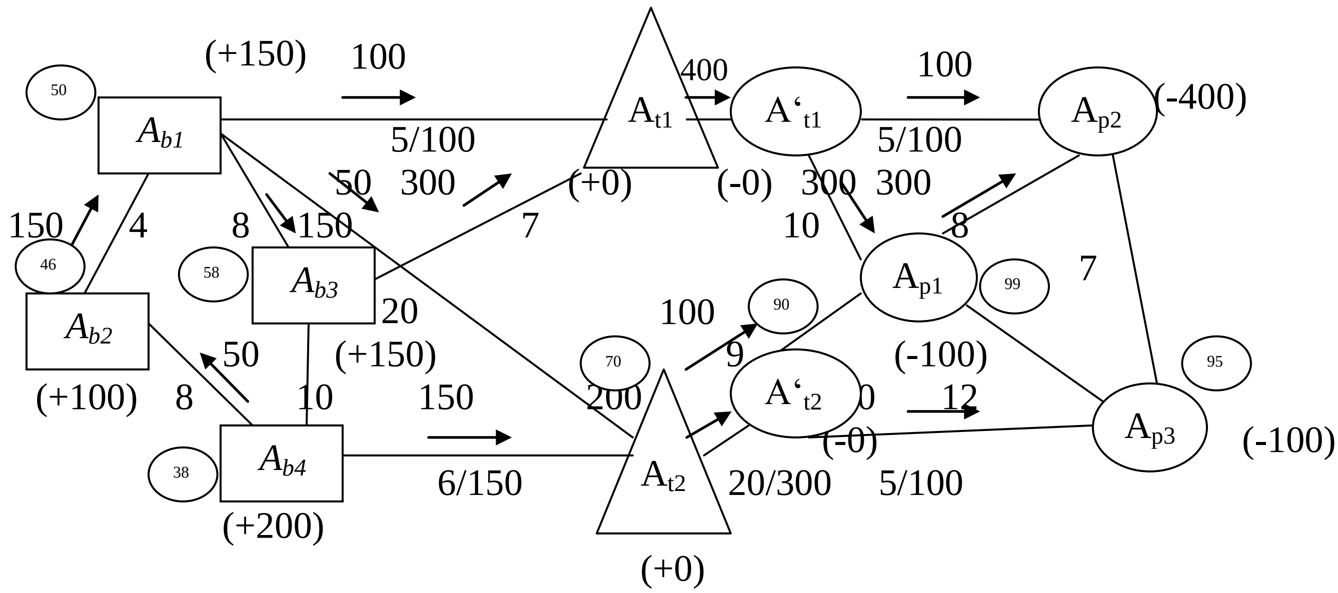

Рис. 4.6. Розрахунок потенціалів для плану перевезень X_1

Результат перевірки на оптимальність на перенасичених ребрах є наступним:

ребро потенціали $|vi-vj|$ c_{ij} дисбаланс

Таблиця 4.2

Перевірка плану на перенасичених ребрах

ребро	потенціали	V_i - V_j	C_{ij}	дизбаланс
$[A_{b1}, A_{t1}]$	50 65	15	5	+
$[A_{t1}, A'_{t1}]$	65 89	24	15	+
$[A'_{t1}, A_{p2})$	89 107	18	5	+

Тут знаком «+» позначено ті ребра, на яких немає порушень умов оптимальності. В той час як в колонці "дизбаланс" проставлені величини порушень відповідних умов.

Як бачимо, умови оптимальності порушуються лише на незайнятих ребрах. Оскільки найбільше за величиною порушення має місце на ребрі $[A_{b4},A_{t2}]$, то потрібно перейти до корегування плану X_1, включивши ребро $[A_{b4},A_{t2}]$ до числа його базисних ребер.

(S6) Корегування плану перевезень. На цьому кроці обираємо цикл на мережі, який би містив ребро $[A_{b4},A_{t2}]$, а всі інші його ребра були б базисними. Як видно з рис. 9, таким циклом є

$$\{A_{b4}, A_{b2}, A_{b1}, A_{t2} A_{b4}\}$$

Сенс корегування на цьому циклі полягає в тому, щоби задіяти ребро з порушеннями умов оптимальності $[A_{b4},A_{t2}]$ під перевезення. Для цього потрібно визначити напрям перевезень і їх обсяг вздовж цього ребра. Напрям обирається від вершини з меншим потенціалом у вершину з більшим. Отже, в нашому випадку це напрям від A_{b4} до A_{t2}. Для визначення обсягу перевезень слід дотримуватися наступного правила: на всіх ребрах циклу, що мають співнапрямлений вантажапотік з $[A_{b4},A_{t2}]$, обсяги перевезень потрібно збільшити на x^*, а на ребрах з зустрічними перевезеннями – зменшити на таку ж величину x^*. Звідси випливає, що значення x^* не може бути більшим ніж максимальна пропускна здатність ребра $[A_{b4},A_{t2}]$, ніж мінімальне значення на зустрічних перевезеннях з $[A_{b4},A_{t2}]$ потоків, та ніж мінімальне значення різниці $d_{ij} - x_{ij}$ на співнаправлених маршрутах, тобто

$$X^* = min\{d_{b4,t2,}\ min\, X_{ij\text{зустр},}\ min\{d_{ij} - X_{ij}\}_{\text{співнапр}}\} \tag{4.1}$$

Зауважимо, що у випадку, коли ребро, на якому порушуються умови оптимальності, було б перенасиченим, то обсяг перевезень слід обирати за іншим критерієм, а саме

$$X^* = min\{min\, X_{ij\ \text{cï³âíàïð}}\ , min\{d_{ij} - X_{ij}\}_{\text{çóñòð.}}\} \tag{4.2}$$

Дійсно, в цьому випадку на всіх ребрах циклу, що мають співнапрямлений вантажопотік, обсяги перевезень потрібно зменшити на x^*, а на ребрах з зустрічними перевезеннями – відповідно збільшити на таку ж величину x^*. При цьому зрозуміло, що корегування на перенасиченому ребрі полягає в зменшенні його початкового перевезення на величину x^*.

Отже, виходячи з (4.1), маємо $X^* = min\{150{,}200\} = 150$. В результаті, зменшуючи вантажопотік на 150 одиниць на ребрах $[A_{b4},A_{b2}]$, $[A_{b2},A_{b1}]$, та $[A_{b1},A_{t2}]$, приходимо до наступного плану перевезень X_2 (див. рис. 4.7). Підрахуємо його вартісний показник. Отримаємо що на 900 одиниць менше ніж для плану X_1.

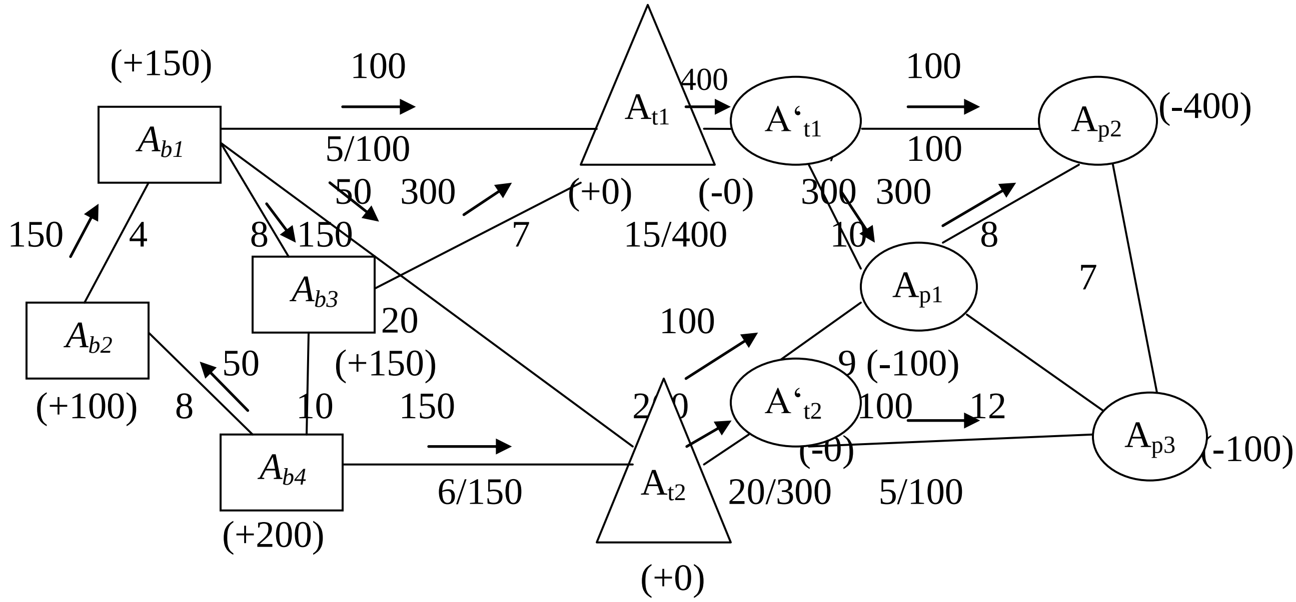

Рис. 4.7. Покращення плану перевезень

$$I(X_2) = 150 \cdot 4 + 50 \cdot 8 + 150 \cdot 8 + 50 \cdot 20 + 150 \cdot 6 + 100 \cdot 5 + 300 \cdot 7 + 400 \cdot 15 +$$
$$+ 200 \cdot 20 + 100 \cdot 9 + 300 \cdot 10 + 100 \cdot 5 + 300 \cdot 8 + 100 \cdot 5 = 24000 \; (ãðîøîâèõîä \;\; èíèöü)$$

Далі, за алгоритмом, слід перейти до перевірки отриманого плану на невиродженість, розстановку потенціалів і до пункту (S5). Проте зауважимо, що ребро *[A_{b4},A_{t2}]* в новому плані X_2 перейшло в розряд перенасичених, а на обраному циклі не з'явилося інших ребер з нульовими перевезеннями. Отже, базисні ребра не змінилися, а це означає, що потенціали при вершинах можна взяти такими ж як у попередньому випадку. Таким чином, перевірка умов оптимальності дає:

Таблиця 4.3

Перевірка плану на незайнятих ребрах

ребро	потенціали	V_i - V_j	C_{ij}	дизбаланс
[A_{b3}, A_{b4}]	58 38	20	10	10
[A_{p1}, A_{p3}]	99 95	4	12	+
[A_{p3}, A_{p2}]	107 95	12	7	5

Таблиця 4.4

Перевірка плану на перенасичених ребрах

ребро	потенціали	V_i - V_j	C_{ij}	дизбаланс
[A_{b1}, A_{t1}]	50 65	15	5	+
[A_{b4}, A_{t2}]	38 70	32	6	+

Продовження таблиці 4.4

$[A_{t1}, A'_{t1}]$	65 89	24	15	+
$[A'_{t1}, A_{p2}]$	89 107	18	5	+

Вибираючи $[A_{b4},A_{b3}]$, як ребро з найбільшим дизбалансом в умовах оптимальності, переходимо до корегування плану перевезень X_2. В повній аналогії до попереднього, вибираємо цикл:

$$\{A_{b4}, A_{b2}, A_{b1}, A_{b3}, A_{b4}\},$$

в якому $[A_{b4},A_{b3}]$ є єдиним небазисним ребром. Використовуючи попередні рекомендації, включаємо ребро $[A_{b4},A_{b3}]$ до перевезень, обравши напрям перевезень на ньому від вершини A_{b4} до A_{b3}, а обсяг x^* обчисливши за правилом (4.1), тобто:

$$X^* = min\{min\, X_{ij\,зустр.}\} = min\{150{,}50\} = 50$$

В результаті, зменшуючи вантажопотік на 50 одиниць на ребрах $[A_{b4},A_{b2}]$, $[A_{b2},A_{b1}]$, та $[A_{b1},A_{b3}]$, приходимо до плану перевезень X_3 (див. рис. 4.8). Підрахуємо його вартісний показник. Отримаємо

$$\begin{aligned} I(X_3) &= 100\cdot 4 + 50\cdot 10 + 100\cdot 8 + 50\cdot 20 + 150\cdot 6 + 100\cdot 5 + 300\cdot 7 + 400\cdot 15 + \\ &+ 200\cdot 20 + 100\cdot 9 + 300\cdot 10 + 100\cdot 5 + 300\cdot 8 + 100\cdot 5 = 23500 (\text{ãðîøîâèõîä èíèöü}) \end{aligned}$$

що на 500 одиниць менше ніж для плану X_2. Легко бачити, що отриманий план є невиродженим, якщо його базисні ребра утворити з числа всіх зайнятих ребер та вільного ребра $[A:‘p_1,A_{p3}]$ (див. для порівняння крок (S3)). Для перевірки цього плану на оптимальність, підкорегуємо потенціали вершин транспортної мережі (див. рис. 4.6) та перейдемо до перевірки умов оптимальності. Отримаємо, для незайнятих ребер:

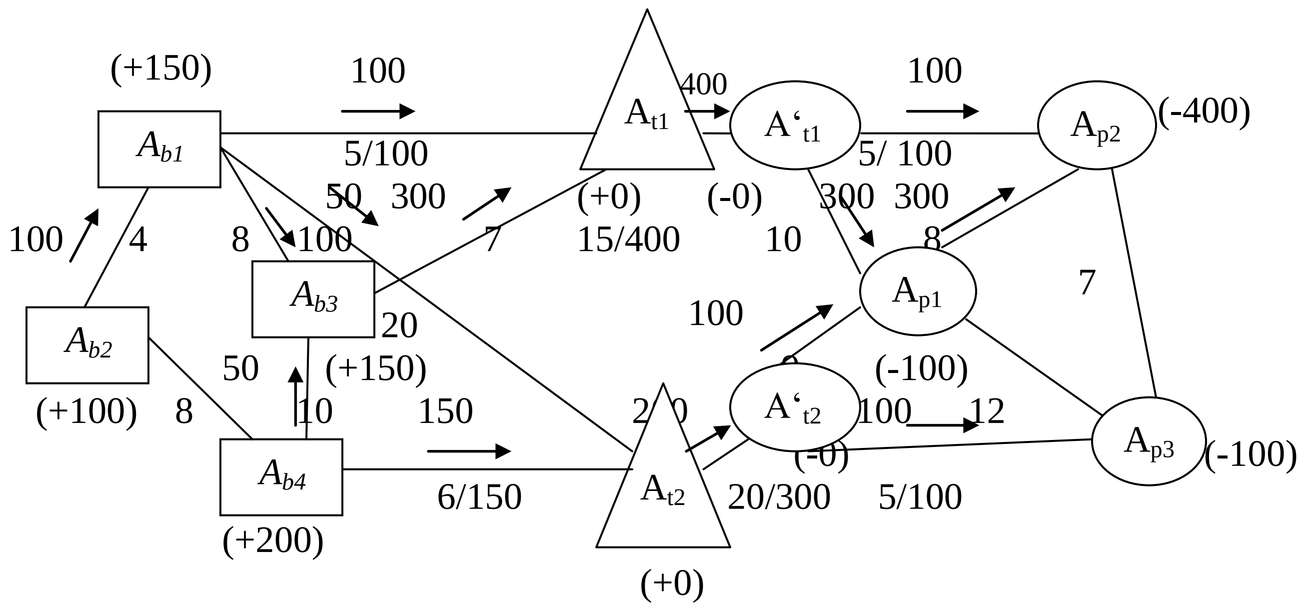

Рис. 4.8. Покращення плану перевезень

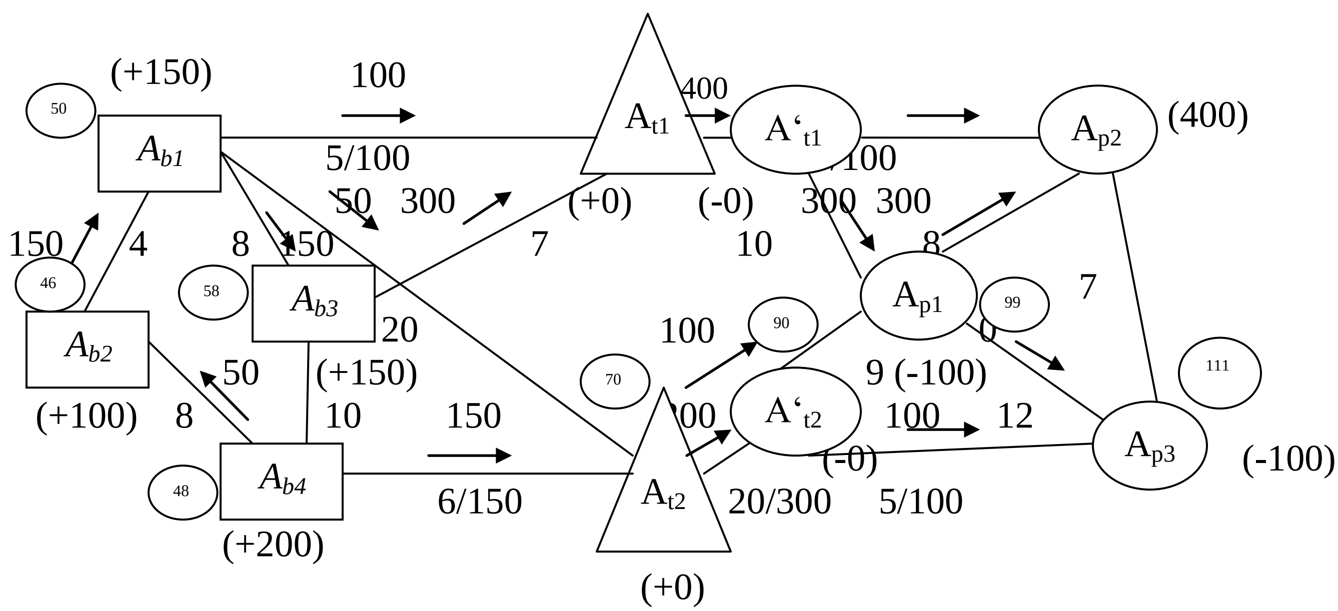

Рис. 4.9. Розрахунок потенціалів для плану перевезень X_3

Таблиця 4.5

Перевірка плану на незайнятих ребрах

ребро	потенціали	V_i - V_j	C_{ij}	дизбаланс
$[A_{b2}, A_{b4}]$	46 48	2	8	+
$[A_{p3}, A_{p2}]$	107 111	4	7	+

Таблиця 4.6

Перевірка плану на незайнятих ребрах

ребро	потенціали	V_i - V_j	C_{ij}	дизбаланс
$[A_{b1}, A_{t1}]$	50 65	15	5	+
$[A_{b4}, A_{t2}]$	48 70	22	6	+
$[A_{t1}, A'_{t1}]$	65 89	24	15	+
$[A'_{t1}, A_{p2}]$	89 107	18	5	+
$[A'_{t2}, A_{p3}]$	90 111	21	5	+

Таким чином, умови оптимальності виконуються. Отже, отриманий план перевезень є оптимальним і алгоритм завершує роботу.

Як результат розв'язання поставленої задачі з доставки готової продукції через склади до мережі споживачів, маємо наступний план перевезень (див. рис. 13, де виконано операцію по реорганізації транспортної мережі, об'єднуючи вершини A_{t1} з A'_{t1} та A_{t2} з A'_{t2}).

Згідно з отриманим планом, вартість за доставку готової продукції з станцій-відправників до складів, дорівнює:

$$I_1\left[X^{opt}\right] = 100\cdot 4 + 100\cdot 8 + 50\cdot 10 + 150\cdot 6 + 300\cdot 7 + 50\cdot 20 + +100\cdot 5 = 6200$$

Вартість за зберігання продукції на складах становить:

$$I_2\left[X^{opt}\right] = 400\cdot 15 + 200\cdot 20 = 10000$$

І вартість за доставку продукції з складів до споживачів (станцій призначення), складає:

$$I_3\left[X^{opt}\right] = 100\cdot 5 + 300\cdot 10 + 300\cdot 8 + 100\cdot 9 + 100\cdot 5 = 7300$$

що в сумі дає $I\left[X^{opt}\right] = \sum I_i\left[X^{opt}\right] = 23500$ умовних грошових одиниць.

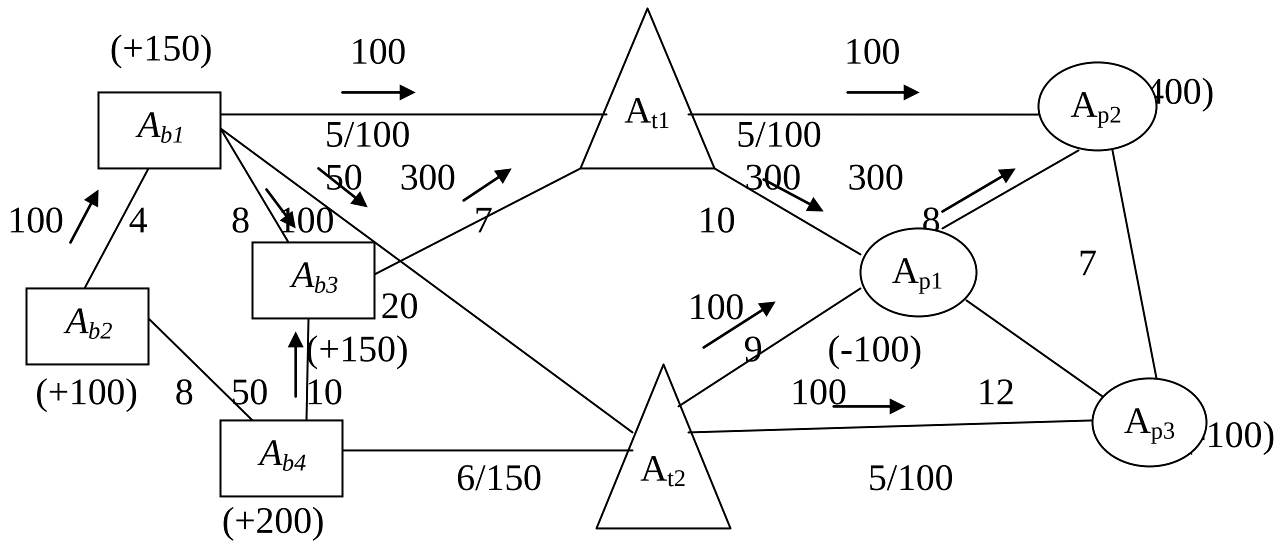

Рис. 4.10. Оптимальний план перевезень X^{opt}

5. Варіанти задач для самостійної роботи

Нехай двоетапна задача з доставки продукції від станцій-відправників до станцій призначення, задана мережею на рис. 4.11. Додатково вважатимемо, що доставка готової продукції є можливою лише через її перевантаження на складах A_{t1} та A_{t2}, вартість зберігання на яких відповідно складає 15 та 20 умовних одиниць за одиницю продукції.

Необхідно знайти такий план перевезень, при якому весь обсяг продукції буде доставлено до споживачів з мінімальними транспортними та складськими затратами. Дані до розрахунків взяти з наступної таблиці

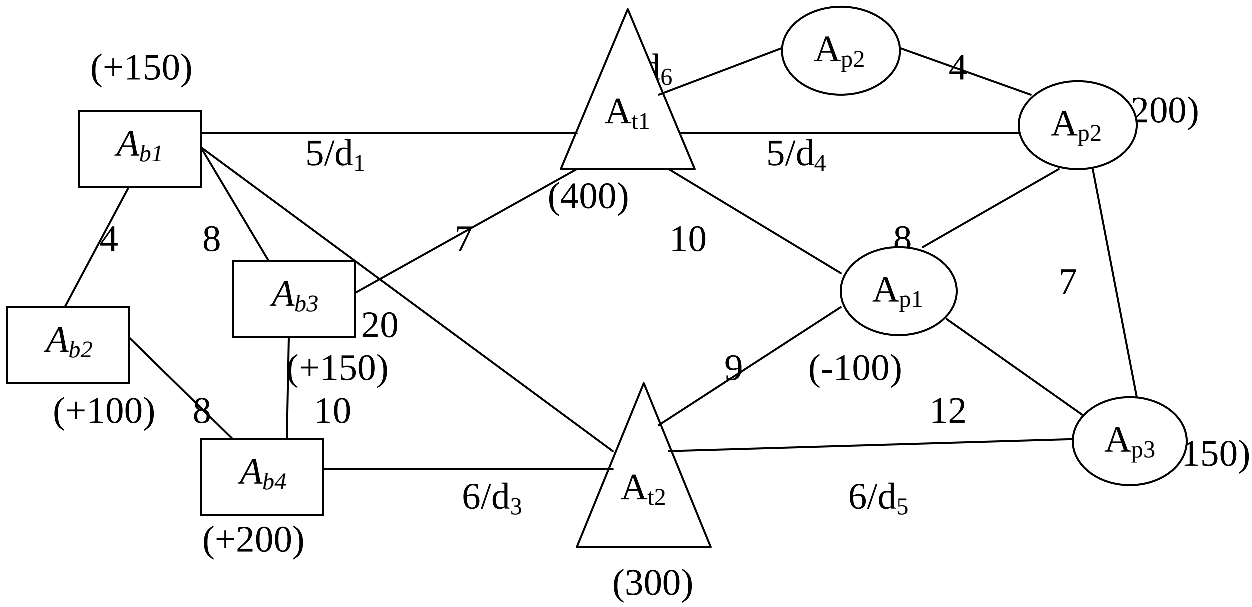

Рис. 4.11. Вихідна транспортна мережа

Варіант	***d1***	***d2***	***d3***	***d4***	***d5***	***d6***
1	∞	150	100	∞	120	100
2	∞	100	150	100	∞	120
3	∞	150	100	120	100	∞
4	100	∞	120	∞	100	100
5	100	∞	100	100	∞	100
6	100	∞	100	100	100	∞
7	120	100	∞	∞	100	100
8	120	100	∞	100	∞	120
9	120	100	∞	100	100	∞
10	∞	100	120	∞	120	100
11	∞	120	100	100	∞	100
12	∞	100	100	120	100	∞
13	120	∞	100	∞	100	100
14	100	∞	120	120	∞	100
15	120	∞	100	120	100	∞
16	100	120	∞	∞	120	100
17	100	120	∞	100	120	∞
18	100	120	∞	100	120	∞
19	100	100	∞	100	∞	100
20	100	100	∞	100	100	∞

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Артынов А.П., Скалецкий В.В. Автоматизация процессов планирования и управления. – М.:Наука, 1981.
2. БауэркоксД.Дж., Клосс Д.Дж. Логистика. Интегрированная цепь поставок._ М.:ЗАО "Олимп–Бизнес 2001.
3. Белов И.В., Каплан А.Б.Математические методы в планировании на железнодорожном транспорте. – М.:Транспорт, 1972.
4. Логистика автомобильного транспорта. – М.:Транспорт, 2004.
5. Наконечний С.І., Савіна С.С. Математичне програмування. – К.: КНЕУ, 2003.

Когут Петро Ілліч
Кучерява Марія Анатоліївна

ЛОГІСТИКА.
МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ІНДИВІДУАЛЬНОГО ЗАВДАННЯ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМ НАВЧАННЯ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 0701 ТРАНСПОРТНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Підписано до друку . Формат 30х42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк.
Обл.-вид. арк. Тираж 80 прим. Зам. №

Державний ВНЗ «НГУ»
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19