МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

для студентів денної та заочної форм навчання
напряму підготовки 0701 Транспортні технології

Дніпропетровськ
2014

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«НАЦІОНАЛЬНИЙ ГІРНИЧИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

МЕХАНІКО-МАШИНОБУДІВНИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра управління на транспорті

МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

для студентів денної та заочної форм навчання
напряму підготовки 0701 Транспортні технології

Дніпропетровськ
ДВНЗ «НГУ»
2014

Методи і алгоритми прийняття рішень. Методичні рекомендації до виконання практичних занять для студентів денної та заочної форм навчання напряму підготовки 0701 Транспортні технології/ П. І. Когут, М.А. Кучерява – Д.: Державний вищий навчальний заклад «Національний гірничий університет», 2014. – с.

Автори:
П. І. , доктор. фіз.-мат. наук, проф.
М.А. Кучерява, асист.

Затверджено до видання редакційною радою НГУ (протокол № від) за поданням методичної комісії напряму підготовки 0701 Транспортні технології (протокол № від).

Мета практичних робіт – допомогти студентам закріпити теоретичний матеріал з дисципліни “Методи і алгоритми прийняття рішень”.

У завданнях розв’язуються задачі, які виникають у реальному транспортному процесі.

Запропоновані завдання охоплюють усі розділи курсу.

Завдання виконують згідно з варіантами, які наведені в кінці кожного параграфу з допоміжними розрахунками. У кінці кожного завдання необхідно зробити відповідні висновки.

Відповідальний за випуск завідувач кафедри управління на транспорті, канд. техн. наук, доц. І.О. Таран.

Друкується у редакційній обробці авторів.

Зміст

§1. ЗАДАЧА ПРИЙНЯТТЯ СТАТИСТИЧНИХ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТИ

1.Постановка задачі та необхідні теоретичні відомості. Процес прийняття статистичного рішення відрізняється від інших задач дослідження операцій відсутністю достатньої інформації про умови прийняття рішення. Так, наприклад, можуть бути заздалегідь невідомі: погода в деякому регіоні, попит покупців та ціни на певний вид продукції, обсяг перевезень, що прийдеться виконувати залізниці, і т.п.

Нехай $A_1,\dots,A_n$ – повна группа можливих варіантів (альтернатив) рішення, $П_1,\dots, П_m$ – умови прийняття рішення, що припускаються. Нехай a_{ij} – прибуток (кількість продукції, що виробляється,обсяг перевезень і т.п.), який одержують при прийнятті рішення A_i і можливій ситуації $П_j$, $i = 1,\dots,n;\ j = 1,\dots,m$. Матриця $(a_{ij})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$ називається *платіжною матрицею*. Потрібно прийняти таке рішення, що є кращим (більш вигідним у порівнянні з іншими рішеннями). Перевага того чи іншого рішення визначається за обраним критерієм.

Вибір критерію переваги рішення здійснюється на базі інформації про умови прийняття рішення. Очевидно, що надійність (у розумінні мінімальності ризику) прийнятого рішення залежить від обсягу такої інформації. Приведемо деякі з цих критеріїв [1].

1.1. Нехай відомі імовірності $pj = p(Пj)$ ситуацій $Пj$, $j = 1,\dots,m$; $\sum\limits_{j=1}^{m} p_j = 1$.

Тоді «дохід» від застосування рішення A_i, , $i = 1,\dots,n$ стає випадковою величиною X_i із законом розподілу:

X_i	a_{i1}	a_{i2}	…	a_{ij}	…	a_{im}
p_i	p_1	P_2	…	p_j	…	p_m

Тому кожному рішенню A_i , $i = 1,\dots,n$ можна ставити у відповідність середній очікуваний " дохід " $d_i\ (A_i\ ) = M(X_i\ )$, де M(.) - математичне сподівання. Тоді найкраще рішення вибирається з умови

$$\max_{1\le i\le n}\{d_i(A_i)\}.$$

Імовірності ситуацій Π_j , $j = 1,...,m$ можуть бути визначені зі статистичних даних, зв'язаних з багаторазовим виконанням подібних операцій чи просто з проведенням спостереження за станом галузі (об'єкта). Наприклад, якщо залізниці за даний проміжок часу потрібно виконати не цілком відомий обсяг перевезень, то дані про розподіл імовірностей можуть бути визначені з досвіду минулих років.

1.2. Критерії Вальда і Севіджа «крайнього песимізму». Згідно з критерієм Вальда краще рішення вибирають, орієнтуючись на гіршу ситуацію, тобто вибирається те рішення, для якого очікуваний «дохід» максимальний у разі самої несприятливої ситуації. При цьому гарантується дохід не менший, ніж максимін:

$$\max_{1\le i\le n}\ \min_{1\le j\le m} a_{ij}.$$

Аналогічним є критерій Севіджа, згідно з яким краще рішення вибирається, коли величина ризику втрат дорівнює

$$\min_{1\le i\le n}\ \max_{1\le j\le m}\left\{\max_{1\le k\le n} a_{kj}-a_{ij}\right\},$$

тобто приймає найменше значення в самій несприятливій ситуації (коли ризик максимальний). Приведені критерії є критеріями крайнього песимізму з погляду втрати доходу в порівнянні з тим, чого можна було б досягти в даних умовах.

1.3. Критерій «песимізму-оптимізму» Гурвіца. Цей критерій рекомендує у виборі рішення не керуватися ні крайнім песимізмом (завжди розраховує на гірше), ні крайнім , легковажним оптимізмом (усе обійдеться щонайкраще!). Особа, що приймає рішення[1], має можливість враховувати тенденції розвитку подій і регулювати критерії прийняття рішення. Відповідно до критерію Гурвіца вигідне рішення вибирається з умови

$$\max_{1\le i\le n}\left\{\alpha\min_{1\le j\le m}a_{ij}+(1-\alpha)\max_{1\le j\le m}a_{ij}\right\},$$

де $\alpha \in [0,1]$ - регулятор критерію. За $\alpha = 1$ із критерію Гурвіца випливає критерій крайнього песимізму Вальда, за $\alpha = 0$ – критерій крайнього оптимізму. Особа, що приймає рішення, регулює «настрій» за допомогою $\alpha \in (0,1)$. На практиці, у вкрай невизначених ситуаціях вибирають «нейтральне» значення $\alpha = 0{,}5$.

Відзначимо, що результат застосування кожного з наведених критеріїв можна розглядати як експертну оцінку рішень. Тому остаточне рішення можна вибрати за більшостю голосів експертів.

Приклад 1.1. Розглянемо задачу прийняття рішень з п'яти A_i , $i = 1,...,5$ можливих і чотирьох варіантів можливих умов $П_j$, $j = 1,...,4$. Платіжна матриця дана в табл. 1.

Т а б л и ц я 1

Ситуації / Рішення	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	5	4	3	6
A_2	2	6	7	5
A_3	3	7	4	5
A_4	6	8	2	4
A_5	3	7	6	3
Імовірності ситуацій *p*	0,3	0,2	0,4	0,1

Знайти оптимальне (найбільш вигідне) рішення, використовуючи критерії: за максимально можливим доходом (експерт 1), Вальда(експерт 2), Севіджа(експерт 3), Гурвіца за умови $\alpha = 0{,}5$; $\alpha = 0{,}25$; $\alpha = 0{,}75$(експерти 4,5,6).

Розв'язання. 1. Відповідно до критерію за максимально можливим доходом обчислимо:

$$d_1(A_1) = 5 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}1 = 4{,}1;$$

$$d_2(A_2) = 2 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}1 = 5{,}1;$$

$$d_3(A_3) = 3 \cdot 0{,}3 + 7 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}1 = 4{,}4;$$

$$d_4(A_4) = 6 \cdot 0{,}3 + 8 \cdot 0{,}2 + 2 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}1 = 4{,}6;$$

$$d_5(A_5) = 3 \cdot 0{,}3 + 7 \cdot 0{,}2 + 6 \cdot 0{,}4 + 3 \cdot 0{,}1 = 5{,}0.$$

Тому що $\max\{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5\} = 5{,}1 = d_2(A_2)$,то відповідно до цього критерію найкращим є рішення A_2.

2. Відповідно до критерію Вальда

$$\max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le m} a_{ij} = \max\{3;2;3;2;3\} = 3.$$

Тому рішення A_1, A_3, A_5 кращі в порівнянні з рішеннями A_2 і A_4 .

Відповідно до критерію Севіджа складемо так звану матрицю ризику

$$R = \left[\max_{1 \le k \le n} a_{kj} - a_{ij} \right]_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Елементи r_{ij} цієї матриці виражають різницю між доходом, який можна було б одержати за відомої ситуації $П_j$, і доходом, фактично отриманим у тій же ситуації у разі прийняття рішення A_i . Ясно, що для всіх i,j $r_{ij} \ge 0$.

Отже,

$$\min_{1 \le i \le n} \max_{1 \le j \le m} \mathrm{r_{ij}} = \min\{4,4,3,5,3\} = 3.$$

Звідси випливає, що за критерієм Севіджа найкращими є рішення A_3 і A_5.

4. а) За критерієм Гурвіца у разі α = 0,5 маємо

$$\min_{1 \le j \le 4} a_{ij} = \{3;2;3;2;3\}, \quad \max_{1 \le j \le 4} a_{ij} = \{6;7;7;8;7\}, \; i = 1,\ldots,5;$$

$$\max_{1 \le i \le 5}\{0,5 \cdot \min_{1 \le j \le 4} a_{ij} + 0,5 \cdot \max_{1 \le j \le 4} a_{ij}\} =$$

$$= \max_{1 \le i \le 5}\{0,5 \cdot (3+6);\; 0,5 \cdot (2+7);\; 0,5 \cdot (3+7);\; 0,5 \cdot (2+8);\; 0,5 \cdot (3+7)\} =$$

$$= \max_{1 \le i \le 5}\{4,5;\; 4,5;\; 5;\; 5;\; 5\} = 5.$$

Отже, кращими є рішення A_3 ,A_4 ,A_5.

б) у разі α = 0,25 маємо

$$\max_{1\le i\le 5}\{0{,}25\cdot\min_{1\le j\le 4} a_{ij} + 0{,}75\cdot\max_{1\le j\le 4} a_{ij}\} =$$
$$= \max_{1\le i\le 5}\{(0{,}75+4{,}5);\ (0{,}5+5{,}25);\ (0{,}75+5{,}25);\ (0{,}5+6);\ (0{,}75+5{,}25)\} =$$
$$= \max_{1\le i\le 5}\{6{,}25;\ 5{,}75;\ 6;\ 6{,}5;\ 6\} = 6{,}5.$$

Отже, кращим є рішення A_4 .

в) у разі $\alpha = 0{,}75$ маємо

$$\max_{1\le i\le 5}\{0{,}75\cdot\min_{1\le j\le 4} a_{ij} + 0{,}25\cdot\max_{1\le j\le 4} a_{ij}\} =$$
$$= \max_{1\le i\le 5}\{(2{,}25+1{,}5);\ (1{,}5+1{,}75);\ (2{,}25+1{,}75);\ (1{,}5+2);\ (2{,}25+1{,}75)\} =$$
$$= \max_{1\le i\le 5}\{3{,}75;\ 3{,}25;\ 4;\ 3{,}5;\ 4\} = 6{,}5.$$

Отже, кращими є рішення A_3 , A_5.

Отримані експертні дані занесемо в табл. 2.

Т а б л и ц я 2

Експ. / Рішен.	Експерт1	Експерт2	Експерт3	Експерт4	Експерт5	Експерт6	Кількість набр. гол.
A_1		+					1
A_2	+						1
A_3		+	+	+		+	4
A_4				+	+		2
A_5		+	+	+		+	4

Із таблиці видно, що при заданих імовірностях ситуацій варто віддати перевагу рішенню A_2 (дає найбільший дохід за найбільш ймовірної ситуації). У разі повної невизначеності кращими є рішення A_3 і A_5.

2.Варіанти індивідуального завдання. Розв'язати задачу прийняття рішень в умовах невизначеності з платіжною матрицею, що наведена в табл. 3 чи 4. У цих таблицях *к* – остання цифра номера групи, *N* – номер студента за журналом.

2.1. Варіант 1 ($1 \leq N \leq 10$):

Таблиця 3

Ситуації / Рішення	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$
A_1	3	$2N+k$	$k+N$	kN
A_2	$3N$	$N+2k$	$N+3k$	$N+k$
A_3	K	N	$2k+N$	$2k+2N$
A_4	5	3	$2N+k$	$4N-k$
A_5	$2k$	$3k+N$	$2N$	$3N+k$
Імовірності ситуацій p	$\frac{2k}{8k+4N}$	$\frac{N}{8k+4N}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

2.2. Варіант 2 ($N \geq 11$):

Таблиця 4

Ситуації / Рішення	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
A_1	3	$2N+k$	$k+N$	kN	$3k+N$
A_2	$3N$	$N+2k$	$N+3k$	$N+k$	-5
A_3	K	N	$2k+N$	$2k+2N$	$N+k$
A_4	5	3	$2N+k$	$4N-k$	6
Імовірності ситуацій p	$\frac{2k}{8k+4N}$	$\frac{N}{8k+4N}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

§2. ЗАДАЧА ПРИЙНЯТТЯ ОПТИМАЛЬНОГО РІШЕННЯ В УМОВАХ КОНФЛІКТУ

1.Постановка задачі та необхідні теоретичні відомості. Під час рішення ряду практичних задач доводиться аналізувати ситуації, у яких зтикаються інтереси двох (або більше) конкуруючих сторін, що переслідують різні цілі, причому результат будь-якого заходу кожної зі сторін залежить від того, яке рішення вибере супротивник. Такі ситуації можна називати *конфліктними*.

Будь-яка ситуація, що складається в ході воєнних дій, ряд ситуацій в області економіки, наприклад, між конкуруючими торговими фірмами, промисловими підприємствами, трестами, монополіями і т.д., у судочинстві, у спорті й інших областях людської діяльності, є конфліктними.

Задача прийняття рішення в умовах конфлікту називається *ігровою задачею* [1,2]. Математично *грою* називається трійка $< X, Y, Z >$, де X - множина стратегій (можливих рішень) умовно, так званого, першого гравця, Y - множина стратегій другого гравця, $Z = Z(x,y)$ - функція виграшу одного з гравців (нехай цим гравцем буде перший гравець) за $x \in X$, $y \in Y$. Таким чином, додатне значення функції $Z = Z(x,y)$ виражає виграш (доход) першого гравця, якщо він вибере стратегію $x \in X$, а другий гравець вибере стратегію $y \in Y$. Якщо $Z(x,y)=0$, то це означає, що перший гравець нічого не виграв, а якщо $Z(x,y)<0$, то він програв (значить, виграв другий гравець).

Стратегією гравця називається сукупність правил, що визначають вибір варіанта дій у кожному особистому ході цього гравця в залежності від ситуації, що склалася в процесі гри. *Оптимальною стратегією* гравця називається така стратегія, що у разі багаторазового повторення гри забезпечує даному гравцю максимально можливий середній виграш (або, що те ж саме, мінімально можливий середній програш). У виборі цієї стратегії основою міркувань кожного гравця є припущення, що супротивник щонайменше такий же розумний, як і він, і робить усе для того, щоб домогтися своєї мети.

Відзначимо, що задача прийняття рішення в умовах невизначеності, яка розглянута в §1, також є ігровою. У цій задачі супротивником особи, що приймає рішення (першого гравця), є «природа», що розглядається як деяка незацікавлена інстанція, «поводження» якої невідомо, але не містить елементу свідомої протидії. У цьому випадку X - це множина стратегій (рішень) A_i, $i = 1,...,n$; Y - множина стратегій (ситуацій) Πj, $j = 1,...,m$; $Z = Z(A_i, \Pi_j) = a_{ij}$, $i = 1,...,n$; $j = 1,...,m$. Таку гру називають[1,2] грою «*людина-природа*».

2. Матрична гра. Розглянемо гру, в якій перший гравець має n стратегій A_i, $i = 1,...,n$, а другий гравець m стратегій B_j, $j = 1,...,m$. Стратегії $A_1, ..., A_n$ і $B_1, ..., B_m$ називаються *чистими стратегіями гравців*. За допомогою функції виграшу $Z = Z(Ai, Bj)$ можна визначити платіжну матрицю гри:

Т а б л и ц я 5

С. друг. гр. / С. перш. гр.	B_1	B_2	...	B_m
A_1	a_{11}	A_{12}	…	a_{1m}
A_2	a_{21}	A_{22}	…	a_{2m}
...	…	…	…	…
A_n	a_{n1}	a_{n2}	…	a_{nm}

У табл. 5 $a_{ij} = Z(A_i, B_j)$ - виграш першого гравця, якщо він вибере чисту стратегію A_i, а другий гравець вибере чисту стратегію B_j.

Якщо задана гра виконується тільки один раз, то кожний із гравців може вибрати визначену стратегію і до кінця гри дотримуватися цієї стратегії. Така гра називається *матричною грою в чистих стратегіях* і виконується за принципом оптимальності: якщо перший гравець вибирає стратегію A_i^0, то другий гравець може вибрати таку стратегію B_j^0, за якої виграш першого гравця дорівнює найменшому із чисел $Z(A_i^0, B_j)$, тобто

$$\min_{1 \le j \le m} Z(A_i^0, B_j).$$

Тому перший гравець буде схильний вибрати свою стратегію так, щоб цей мінімальний виграш був найбільшим, тобто рівним

$$\min_{1 \le j \le m} Z(A_i^0, B_j) = \max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le m} Z(A_i, B_j) = Z_0(\Gamma).$$

Величину $Z_0(\Gamma)$ називають *нижнім значенням* (*нижньою ціною*) гри $\Gamma = < X, Y, Z >$, $X = (A_1, \ldots, A_n)$, $Y = (B_1, \ldots, B_m)$. Очевидно, що

$$Z(A_i^0, B_j) \ge Z_0(\Gamma) \qquad (1)$$

для всіх $B_1, \ldots, B_m$. Тому стратегію A_i^0 називають *максимінною чистою* *стратегією* першого гравця. Застосовуючи цю стратегію, перший гравець за будь-якого поводження другого гравця забезпечує собі виграш, не менший, ніж $Z_0(\Gamma)$.

Аналогічна стратегія B_j^0 другого гравця визначається з рівності

$$\max_{1\le i\le n} Z(A_i, B_j^0) = \min_{1\le j\le m} \max_{1\le i\le n} Z(A_i, B_j) = Z^0(\Gamma).$$

Величину $Z^0(\Gamma)$ називають *верхнім значенням* (*верхньою ціною*) гри $\Gamma = < X,Y,Z >$. Очевидно, що

$$Z(A_i, B_j^0) \le Z^0(\Gamma) \qquad (2)$$

для всіх A_1 ,..., A_n. Тому стратегію B_j^0 називають *мінімаксною чистою стратегією* другого гравця. Застосовуючи цю стратегію, другий гравець при будь-якому поводженні першого гравця забезпечує собі програш, не більший, ніж $Z^0(\Gamma)$.

Із нерівностей (1) і (2) випливає, що

$$Z_0(\Gamma) \le Z(A_i^0, B_j^0) \le Z^0(\Gamma). \qquad (3)$$

Дотримуючись стратегії A_i^0, перший гравець поводить себе дуже обережно: він бажає одержати величину $Z_0(\Gamma)$ незалежно від дій другого гравця. Принцип, якого він дотримується, називається *принципом максиміна*. Другий гравець діє за цим же принципом, що забезпечує йому програш, не більший, ніж $Z^0(\Gamma)$. Справедлива [2]

Теорема 2.1. *Для того, щоб стратегії* A_i^0, B_j^0 *були максимінними і мі-*

німаксними чистими стратегіями і $Z_0(\Gamma) = Z^0(\Gamma)$, *необхідно і достатньо виконання подвійної нерівності*

$$Z_0(A_i, B_j^0) \le Z(A_i^0, B_j^0) \le Z^0(A_i^0, B_j), i = 1,\ldots,n, j = 1,\ldots,m. \qquad (4)$$

Ситуація (A_i^0, B_j^0), що задовольняє умову (4), *називається ситуацією рівноваги* (*сідловою точкою*) у чистих стратегіях.

Таким чином, ситуація рівноваги в чистих стратегіях існує тоді і тільки тоді, коли $Z_0(\Gamma) = Z^0(\Gamma)$. Для матричної гри в чистих стратегіях із платіжною матрицею, що наведена в табл. 5, це означає виконання рівності

$$\max_{1 \le i \le n} \min_{1 \le j \le m} a_{ij} = \min_{1 \le j \le m} \max_{1 \le i \le n} a_{ij} = Z_0(\Gamma) = Z^0(\Gamma). \qquad (5)$$

Величина $Z_0(\Gamma) = Z^0(\Gamma)$ (див. (5)) називається *значенням* (*ціною*) матричної гри в чистих стратегіях.

Приклад 2.1[2]. Перевірити існування ситуації рівноваги в грі з заданою матрицею виграшу першого гравця, що наведена в табл. 6.

Таблиця 6

С. друг. гр. / С. перш. игр.	B_1	B_2	B_3
A_1	1	-3	-2
A_2	0	5	4
A_3	2	3	2

Розв'язання. Спочатку знайдемо $Z_0(\Gamma)$:

$$\min_{1 \le j \le 3} a_{1j} = -3, \ \min_{1 \le j \le 3} a_{2j} = 0, \ \min_{1 \le j \le 3} a_{3j} = 2 \rightarrow \max_{1 \le i \le 3} \min_{1 \le j \le 3} a_{ij} = 2;$$

Тепер знайдемо $Z^0(\Gamma)$:

$$\max_{1\le i\le 3} a_{i1} = 2, \quad \max_{1\le i\le 3} a_{i2} = 5, \quad \max_{1\le i\le 3} a_{i3} = 4 \to \min_{1\le j\le 3}\max_{1\le i\le 3} a_{i1} = 2.$$

Таким чином, у цій грі існує сідлова точка (A_3, B_1), для якої ціна гри $Z_0(\Gamma) = Z^0(\Gamma)$ =2. Відзначимо, що в ситуації (A_3, B_3) також $Z_0(\Gamma)$ = $Z^0(\Gamma)$ =2, але вона не є сідловою точкою, тому що не задовольняє умову (5), оскільки $\max_{1\le i\le 3} a_{i3} = 4$ (стратегія B_3 не є мінімаксною для другого гравця).

Приклад 2.2. Перевірити існування ситуації рівноваги в грі з заданою матрицею виграшу першого гравця, що наведена в табл. 7.

Т а б л и ц я 7

С.друг. гр. / С. перш. игр.	B_1	B_2	B_3
A_1	5	10	40
A_2	30	20	6
A_3	7	8	12

Розв'язання. Спочатку знайдемо $Z_0(\Gamma)$:

$$\min_{1\le j\le 3} a_{1j} = 5, \quad \min_{1\le j\le 3} a_{2j} = 6, \quad \min_{1\le j\le 3} a_{3j} = 7 \to \max_{1\le i\le 3}\min_{1\le j\le 3} a_{ij} = 7 = Z_0(\Gamma).$$

Тепер знайдемо $Z^0(\Gamma)$:

$$\max_{1\le i\le 3} a_{i1} = 30, \quad \max_{1\le i\le 3} a_{i2} = 20, \quad \max_{1\le i\le 3} a_{i3} = 40 \to \min_{1\le j\le 3}\max_{1\le i\le 3} a_{i1} = 20 = Z^0(\Gamma).$$

Звідси випливає, що дана гра не має ситуації рівноваги, тому що $Z^0(\Gamma) > Z_0(\Gamma)$. Якщо тепер перший гравець вибере свою максимінну чисту стратегію A_3, то другий гравець, вибравши свою мінімаксну чисту стратегію B_2 , програє тільки 8. У цьому випадку першому гравцю вигідно вибрати стратегію A_2, тобто відхилитися від своєї максимінної чистої стратегії і виграти 20. Тоді другому гравцю вигідно вибрати стратегію B_3 і програти 6. У свою чергу першому гравцю вигідно вибрати стратегію A_1 , щоб виграти 40, тоді другий гравець відповість вибором стратегії B_1 і т.д.

Таким чином, якщо гра не має ситуації рівноваги в чистих стратегіях, то гравці , застосовуючи свої максимінну і мінімаксну чисті стратегії, створюють нестійку ситуацію, яку один із гравців може змінити з вигодою для себе.

Виходом із такого положення є перехід до гри в так званих *змішаних стратегіях*. У такій грі кожний із гравців може вибрати свою чисту стратегію випадково, тобто може визначити розподіл імовірностей на множину чистих стратегій, а потім надати вибір конкретної чистої стратегії випадковому механізму.

3. Матрична гра в змішаних стратегіях. Вибір гравцями своїх чистих стратегій з деяким розподілом імовірностей, власне кажучи, один із планів ведення гри і тому теж є деякою стратегією. Така стратегія називається *змішаною*. Тоді змішані стратегії гравців $x \in X, y \in Y$ можуть бути подані у вигляді векторів

$$x = (x_1,...,x_n),\ \ y = (y_1,...,y_m),\ \ x_i \geq 0,\ \ y_j \geq 0,\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,\quad \sum_{i=1}^{m} y_j = 1,$$

де $x_i = p(A_i)$ - імовірність вибору чистої стратегії A_i першим гравцем, $y_j = p(B_i)$ - імовірність вибору чистої стратегії B_j другим гравцем. Тоді самі чисті стратегії також можуть бути подані у вигляді змішаних стратегій. Так, наприклад, чистим стратегіям A_i , B_j відповідають вектори $x^i = (0,\dots,1,\dots,0)$, $y^j = (0,\dots,1,\dots,0)$, в яких відповідно i - та і j - та компоненти дорівнюють 1, а інші компоненти дорівнюють нулю.

Відсутність якого-небудь обміну інформації між гравцями робить їхні випадкові вибори своїх чистих стратегій незалежними. Тому, якщо вони застосовують свої змішані стратегії $x \in X, y \in Y$, то виграш a_{ij} першого гравця можливий з імовірністю $x_i y_j = p(A_i) p(B_j), i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m.$ Отже, середній виграш першого гравця являє собою математичне сподівання

$$M(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_i y_j\ . \qquad (6)$$

У підсумку одержуємо нову гру $\Gamma=<X, Y, M(x,y)>$, у якій X і Y - множини змішаних стратегій гравців, а M - функція виграшу першого гравця. Відповідно до теореми про мінімакс Неймана[2] така гра завжди має сідлову точку, тобто існує пара (x^*,y^*) змішаних стратегій, для яких виконуються такі співвідношення (див. п.2):

$$Z_0(\Gamma)=\min_{y\in Y}M(x^*,y)=\max_{x\in X}\min_{y\in Y}M(x,y)=\min_{y\in Y}\max_{x\in X}M(x,y)=$$
$$=\max_{x\in X}M(x,y^*)=Z^0(\Gamma)=M(x^*,y^*). \qquad (7)$$

Стратегії x*,y* називаються *оптимальними стратегіями гравців*, а величина

$$Z_0(\Gamma)=Z^0(\Gamma)=M(x^*,y^*) \qquad (8)$$

називається *ціною* гри $\Gamma=<X, Y, M(x,y)>$.

Розглянемо приклад безпосереднього розв'язання матричної гри в змішаних стратегіях.

Приклад 2.3. Розв'язати матричну гру в змішаних стратегіях з наступною платіжною матрицею першого гравця (табл. 8).

Т а б л и ц я 8

С. друг. гр. / С. перш. игр.	B_1	B_2
A_1	4	2
A_2	3	5

Розв'язання. Тому що

$$\max_{1\le i\le 2}\ \min_{1\le j\le 2} a_{ij} = \max(2,3) = 3, \qquad \min_{1\le j\le 2}\ \max_{1\le i\le 2} a_{ij} = \min(4,5) = 4,$$

то ця гра в чистих стратегіях не має сідлової точки. Вирішимо її в змішаних стратегіях:

$$x = (x_1, x_2),\ y = (y_1, y_2),\ x_1, x_2, y_1, y_2 \ge 0,\ x_1 + x_2 = 1,\ y_1 + y_2 = 1. \qquad (9)$$

З урахуванням умов (9) складемо функцію виграшу першого гравця:

$$M(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 + 5x_2y_2 = 4x_1y_1 + 2x_1(1 - y_1) + 3(1 - x_1)y_1 +$$
$$+ 5(1 - x_1)(1 - y_1) = 4x_1y_1 + 2x_1 - 2x_1y_1 + 3y_1 - 3x_1y_1 + 5 - 5y_1 - 5x_1 + 5x_1y_1 =$$
$$= 4x_1y_1 - 3x_1 - 2y_1 + 5.$$

Таким чином,

$$M(x, y) = M(x_1, y_1) = (4x_1 - 2)y_1 - 3x_1 + 5 \qquad (10)$$

або

$$M(x, y) = M(x_1, y_1) = (4y_1 - 3)x_1 - 2y_1 + 5,\ 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le y_1 \le 1. \qquad (11)$$

Використовуючи співвідношення (7), формули (10) або (11), оптимальні стратегії гравців знаходимо, вирішуючи задачі:

Задача 1: $\max\limits_{0\le x_1\le 1}\ \min\limits_{0\le y_1\le 1} M(x_1, y_1)$; *Задача 2*: $\min\limits_{0\le y_1\le 1}\ \max\limits_{0\le x_1\le 1} M(x_1, y_1)$.

Отже, з огляду на те, що функція $M(x_1, y_1)$ лінійна по x_1 у разі фіксованого y_1 і по y_1 у разі фіксованого x_1, маємо

$$\varphi(x_1) = \min_{0\le y_1\le 1} M(x_1, y_1) = \min_{0\le y_1\le 1}\{(4x_1-2)y_1 - 3x_1 + 5\} =$$

$$= \begin{cases} -3x_1+5 & \text{при} \quad 4x_1-2>0, \\ 4x_1-2-3x_1+5 & \text{при} \quad 4x_1-2<0, \\ \dfrac{7}{2} & \text{при} \quad 4x_1-2=0. \end{cases}$$

Тоді

$$\max_{0\le x_1\le 1} \varphi(x_1) = \left\{ \begin{array}{l} \max\limits_{\frac{1}{2}<x_1\le 1} (-3x_1+5), \\ \max\limits_{0\le x_1<\frac{1}{2}} (x_1+3), \\ \dfrac{7}{2}, \qquad x_1 = \dfrac{1}{2}. \end{array} \right\}. \tag{12}$$

Оскільки лінійна функція $f = -3x_1 + 5$ спадна, а лінійна функція $g = x_1 + 3$ зростаюча, то з (12) одержимо розв'язок задачі 1:

$$\max_{0\le x_1\le 1} \varphi(x_1) = \frac{7}{2} \quad \text{при}\; x_1 = x_1^* = \frac{1}{2}.$$

Отже, $x_2^* = 1 - x_1^* = \dfrac{1}{2},\; x^* = (\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$ і $Z_0(\Gamma) = \dfrac{7}{2}.$

Тепер знайдемо y^* і $Z^0(\Gamma)$:

$$\psi(y_1)=\max_{0\le x_1\le 1} M(x_1,y_1)=\max_{0\le x_1\le 1}\{(4y_1-3)x_1-2y_1+5\}=$$

$$=\begin{cases} 4y_1-3-2y_1+5 & \text{при}\quad 4y_1-3>0,\\ -2y_1+5 & \text{при}\quad 4y_1-3<0,\\ \dfrac{7}{2} & \text{при}\quad 4y_1-3=0.\end{cases}$$

Тоді

$$\min_{0\le y_1\le 1}\psi(y_1)=\left\{\begin{matrix} \min\limits_{\frac{3}{4}<y_1\le 1}(2y_1+2), \\ \min\limits_{0\le y_1<\frac{3}{4}}(-2y_1+5), \\ \dfrac{7}{2},\qquad y_1=\dfrac{3}{4}. \end{matrix}\right\}. \tag{13}$$

Оскільки лінійна функція $u=-2x_1+5$ спадна, а лінійна функція $v=2y_1+2$ зростаюча, то з (13) одержимо розв'язок задачі 2:

$$\min_{0\le y_1\le 1}\psi(y_1)=\frac{7}{2}\quad \text{при}\ y_1=y_1^*=\frac{3}{4}.$$

Отже, $y_2^*=1-y_1^*=\dfrac{1}{4}$, $y^*=(\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4})$ і $Z^0(\Gamma)=\dfrac{7}{2}$.

Таким чином, ціна гри $Z_0(\Gamma)$ = $Z^0(\Gamma)=\dfrac{7}{2}$ зі сідловою точкою (x*, y*), де $x^*=(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2})$, $y^*=(\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{4})$. Цей розв'язок означає, що в процесі гри перший гравець може вибрати свої стратегії з рівними імовірностями. Тоді він виграє не менше $\dfrac{7}{2}$, а другий гравець для збереження ситуації рівноваги повинний віддати перевагу першій стратегії, дотримуючись процентного відношення 75 % : 25 %. Тоді він програє не більше $\frac{7}{2}$.

4.Варіанти індивідуального завдання. 1. Перевірити існування ситуації рівноваги в грі з заданою матрицею виграшу першого гравця, що наведена в табл. 9.

Т а б л и ц я 9

С. друг. гр. / С. перш. игр.	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	3	$2N+k$	$k+N$	kN
A_2	$3N$	$N+2k$	$N+3k$	$N+k$
A_3	k	N	$2k-N$	$2k+2N$
A_4	5	3	$2N+k$	$4N-k$
A_5	2k	$3k+N$	$2N$	$3N+k$
A_6	$5к-1$	5	$6-N$	$N-k$

2. Розв'язати матричну гру в змішаних стратегіях з наступною платіжною матрицею першого гравця. (Табл.10).

Т а б л и ц я 10

С. друг. гр. / С. перш. игр.	B_1	B_2
A_1	$k+N$	$2k+N$
A_2	$3k+N$	$k+N+1$

П р и м і т к а. У табл. 9 і 10 $к$ – остання цифра номера групи, N – номер студента за журналом.

§3. РОЗВ'ЯЗАННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

1. Зведення матричної гри до задачі лінійного програмування. Нехай потрібно розв'язати матричну гру $\Gamma = \langle X, Y, M(x,y) \rangle$, де

$$x=(x_1,\ldots,x_n),\ y=(y_1,\ldots,y_m),\ x_i \ge 0,\ y_j \ge 0,\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,m,$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} y_j = 1, \quad M(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j \,,$$

а a_{ij} - суть елементи платіжної матриці (див. §2).

Відповідно до теореми Неймана[2] у цій грі оптимальні стратегії x^*, y^* існують і знаходяться з умови

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} M(x,y)=\min_{y\in Y}\max_{x\in X} M(x,y)=M(x^*,y^*), \tag{14}$$

де $Z_0(\Gamma)=Z^0(\Gamma)=M(x^*,y^*)$ - ціна гри (підсумковий виграш першого гравця).

Спочатку сформулюємо задачу лінійного програмування, з якої визначається оптимальна стратегія x^* першого гравця. Нехай

$$\min_{y\in Y} M(x,y)=h(x).$$

Тоді для кожного $y\in Y$, $M(x,y)\ge h(x)$, тобто

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j \ge h(x)\,. \tag{15}$$

Оскільки нерівність (15) виконується для усіх $y\in Y$, то вона виконується і для j - ї чистої стратегії y^j другого гравця, у якої усі компоненти дорівнюють нулю, а j - та компонента дорівнює 1. Тоді з (15) одержимо

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \ge h(x) \tag{16}$$

для всіх $j = 1,\dots,m,\ x = (x_1,\dots,x_n) \in X$.

Не порушуючи загальності задачі, завжди можна припустити, що $h(x) > 0$. Якщо ця умова не виконана, то шляхом зміни всіх елементів платіжної матриці на одну і ту ж додатну величину s завжди можна домогтися її виконання. При цьому функція $M(x, y)$ зміниться також на величину s. Дійсно, нехай $a_{ij}^{*} = a_{ij} + s$. Тоді

$$M^{*}(x, y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{*} x_i y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} (a_{ij} + s) x_i y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_i y_j + s\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i y_j =$$
$$= M(x, y) + s.$$

Таким чином, нова гра відрізняється від старої тим, що функція виграшу $M^{*}(x, y)$ одержує «збільшення» s за одних і тих же стратегій. Тому у разі визначення оптимального рішення вихідної гри потрібно врахувати це «збільшення» (тобто потрібно зменшити виграш на величину s).

Отже, можна вважати, що $h(x) = h(x_1,\dots,x_n) > 0$. Тоді з (16) маємо

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_{ij} x_i}{h(x_1,\dots,x_n)} \geq 1,\ \ j = 1,\dots,m. \tag{17}$$

Позначимо

$$u_i = \frac{x_i}{h(x_1,\dots,x_n)},\ i = 1,\dots,n. \tag{18}$$

Для визначення оптимальної стратегії $x^{*} = (x_1^{*},\dots,x_n^{*})$ першого гравця потрібно вирішити задачу

$$\max_{(x_1,\dots,x_n)} h(x_1,\dots,x_n) = Z_0(\Gamma). \tag{19}$$

Використовуючи (18), одержимо:

$$f(u_1,\dots,u_n) = u_1 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{h(x_1,\dots,x_n)} = \frac{1}{h(x_1,\dots,x_n)} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{1}{h(x_1,\dots,x_n)}.$$

Звідси випливає, що розв'язок задачі (19) з урахуванням умов (17) можна замінити задачею лінійного програмування

$$\begin{cases} f(u_1,\dots,u_n) \to \min, \\ u_1,\dots,u_n \geq 0, \\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i \geq 1, \ \ j = 1,\dots,m. \end{cases} \tag{20}$$

Нехай $u^* = (u_1^*,\dots,u_n^*)$ розв'язок задачі (20) і $f_{\min} = f(u_1^*,\dots,u_n^*)$. Тоді можна записати:

$$\max_{(x_1,\dots,x_n)} h(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{f_{\min}} = Z_0(\Gamma), \ u_i^* = \frac{x_i^*}{\max\limits_{(x_1,\dots,x_n)} h(x_1,\dots,x_n)}.$$

Отже,

$$x_i^* = \frac{u_i^*}{f_{\min}} \quad i = 1,\dots,n, \quad Z_0(\Gamma) = \frac{1}{f_{\min}}. \tag{21}$$

Повторюючи майже дослівно ці міркування, можна одержати задачу лінійного програмування для визначення оптимальної стратегії y^* другого гравця:

$$\begin{cases} s(v_1,\ldots,v_m) = v_1 + \ldots. + v_m \to \max, \\ v_1,\ldots,v_m \ge 0, \\ \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} v_j \le 1,\ i = 1,\ldots,n. \end{cases} \tag{22}$$

Якщо $v^* = (v_1^*,\ldots,v_m^*)$ є розв'язком задачі (22) і $s_{\max} = s(v_1^*,\ldots,v_m^*)$, то

$$\min_{y\in Y} \max_{x\in X} M(x,y) = \frac{1}{s_{\max}} = Z^0(\Gamma).$$

Отже,

$$y_j^* = \frac{v_j^*}{s_{\max}},\ j = 1,\ldots,m,\ Z^0(\Gamma) = \frac{1}{s_{\max}}. \tag{23}$$

Відомо[3,4], що задачі (20) і (22) складають пару двоїстих задач лінійного програмування. Відповідно до теореми про мінімакс лінійного програмування[3,4], якщо одна з них має розв'язок, то інша також має розв'язок, при цьому $f_{\min} = s_{\max}$.Тому в ігровій задачі умова рівноваги $Z_0(\Gamma) = Z^0(\Gamma)$ виконується.

Задачі (20) і (22) можуть бути вирішені одночасно за допомогою двоїстого симплекс-методу[3,4]. Спрощений алгоритм цього методу, що достатній для розв'язування матричної гри, ми наведемо далі, на прикладі. Докладний виклад алгоритму двоїстого симплекс-методу і його обґрунтування виходять за рамки даних методичних вказівок.

2. Основна задача лінійного програмування[3]. Задача знаходження найменшого (чи найбільшого) значення лінійної форми

$$F = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \tag{24}$$

за обмежень

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{25}$$

$$x_1,\ldots,x_n \geq 0, \tag{26}$$

називається *основною задачею лінійного програмування*.

Відзначимо, що серед обмежень (25) можуть бути обмеження типу нерівності (див. задачі (20) і (22)). Цю нерівність шляхом уведення додаткового невід'ємного невідомого завжди можна замінити рівністю. Така процедура наведена далі, у розв'язанні прикладу 3.1.

Усякий розв'язок системи рівнянь (25), що задовольняє обмеженням (26), називається *припустимим розв'язком* основної задачі лінійного програмування. Припустимий розв'язок,що мінімизує (або максимізує) форму (24), називається *оптимальним розв'язком* основної задачі лінійного програмування.

Основна задача лінійного програмування має сенс лише в тому випадку, коли система (25) сумісна, тобто коли (відповідно до теореми Кронекера-Капеллі[3]) ранги основної і розширеної матриць системи співпадають, причому цей загальний ранг $r \leq n$. При $r = n$ розв'язок системи (25) єдиний і, якщо він задовольняє обмеження (26), є оптимальним розв'язком основної задачі лінійного програмування. У противному випадку ця задача не має розв'язку.

Найбільший інтерес у лінійному програмуванні становить випадок, коли $r < n$. У цьому випадку система (25) має нескінченну множину розв'язків і для їхнього представлення r так званих *базисних невідомих* $x_1,\ldots,x_r$ виражаються через $n - r$ так званих *вільних невідомих* $x_{r+1},\ldots,x_n$. Припустимий розв'язок системи (25), що виходить при *нульових значеннях вільних невідомих,* називається *базисним припустимим розв'язком* основної задачі лінійного програмування.

Суть симплекс-методу розв'язування задачі лінійного програмування полягає в переході від одного базисного припустимого розв'язку до іншого зі зменшенням (збільшенням) форми *F*. Цю симплекс-процедуру обґрунтовує[3].

Теорема 3.1. *Нехай задана деяка основна задача лінійного програмування.*

Припустимо, що вона має оптимальний розв'язок. Тоді існує хоча б один оптимальний базисний припустимий розв'язок, що може бути отриманий симплекс-методом з будь-якого вихідного базисного припустимого розв'язку.

Для демонстрації правила роботи симплекс-методом при розв'язанні матричної гри спочатку розглянемо наступний

Приклад 3.1(практичний алгоритм двоїстого симплекс-методу). Розв'язати задачу лінійного програмування (аналог задачі (20)):

$$\begin{cases} f = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to \min, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0, \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 \geq -4, \\ \ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6. \end{cases} \tag{26}$$

Розв'язання. Відповідно до двоїстого симплекс-методу складемо двоїсту задачу до задачі (26)(аналог задачі (22)):

$$\begin{cases} s = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to \max, \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0, \\ -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2, \\ \ y_1 - 5y_2 - y_3 \leq 1, \\ \ y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 5, \end{cases} \tag{27}$$

Ця задача порівняно легко розв'язується звичайним симплекс-методом, тому що в цій задачі вихідний базисний припустимий розв'язок знаходиться безпосередньо. Цьому сприяють нерівності типу « $\leq$ » і додатність правих частин в обмеженнях типу нерівностей.

Для розв'язання цієї задачі симплекс-методом приведемо її до основної задачі лінійного програмування. Із цією метою обмеження в задачі (27) запишемо у вигляді рівностей, ввівши додаткові невідомі $y_4, y_5, y_6 \geq 0$:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 = 2, \\ \ y_1 - 5y_2 - y_3 + y_5 = 1, \\ \ \ y_1 + y_2 + 3y_3 + y_6 = 5. \end{cases} \tag{28}$$

Матриця системи (28) має вигляд

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (29)$$

Ця матриця містить одиничний мінор максимально можливого порядку, рівного 3. Розширена матриця системи (28), що виходить з матриці (29) додаванням стовпця вільних членів, також містить цей мінор. Тому ці матриці мають той же самий ранг, рівний 3. Отже, система (28) сумісна і число базисних невідомих дорівнює 3. Тоді число вільних невідомих дорівнює 6 - 3=3. За базисні невідомі можна взяти додаткові невідомі y_4, y_5, y_6. Тоді вихідні невідомі y_1, y_2, y_3 будуть вільними:

$$\begin{cases} y_4 = 2 + y_1 - y_2 - 2y_3, \\ y_5 = 1 - y_1 + 5y_2 + y_3, \\ y_6 = 5 - y_1 - y_2 - 3y_3. \end{cases} \qquad (30)$$

Із системи (30) одержимо вихідний базисний припустимий розв'язок (2;1;5;0;0;0).

Ці міркування показують, що завдяки вище відзначеній специфіці обмежень у задачі (27) такий спосіб комплектації списку базисних і вільних невідомих завжди приводить до базисного припустимого розв'язку. Потрібно відмітити, що в задачі (22) знаходження оптимальної стратегії другого гравця відповідні обмеження також мають ці властивості. Тому *розв'язання матричної гри доцільно починати зі знаходження оптимальної стратегії другого гравця.*

Для розв'язання задачі (27) за допомогою симплекс-методу запишемо її у вигляді, зручному для складання симплекс-таблиці:

$$\begin{cases} s_1 = -s = 0 - (-4y_1 + 5y_2 + 6y_3) \rightarrow \min, \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \geq 0, \\ y_4 = 2 - (-y_1 + y_2 + 2y_3), \\ y_5 = 1 - (y_1 - 5y_2 - y_3), \\ y_6 = 5 - (y_1 + y_2 + 3y_3). \end{cases} \tag{31}$$

Внесемо коефіцієнти при вільних невідомих у всіх формулах системи (31) у верхні чарунки симплекс-таблиці 11:

Т а б л и ц я 11

Вільн. невід. / Баз.невід.	Вільні члени	y_1	y_2 ↑	y_3
s	0 / 6	4 / -3	-5 / 3	-6 / **<u>3</u>**
s_1	0 / -6	-4 / 3	5 / -3	6 / **<u>-3</u>**
y_4 ←	**<u>2</u>** / 1	**<u>-1</u>** / -1/2	**<u>1</u>** / 1/2	**<u>2</u>** / λ=1/2
y_5	1 / 1	1 / -1/2	-5 / 1/2	-1 / **<u>1/2</u>**
y_6	5 / -3	1 / 3/2	1 / -3/2	3 / **<u>-3/2</u>**

Перехід від однієї симплекс-таблиці до іншої означає одержання нового базисного припустимого розв'язку шляхом заміни одного базисного невідомого через вільне невідоме. Ця заміна здійснюється за допомогою так званого *генерального елемента*. Цей елемент вибирається за такими правилами:

а) у рядку для s_1 знаходимо який-небудь додатний елемент (вільний член не враховується!). Якщо в цьому рядку немає додатного елемента, то записаний в цій симплекс-таблиці базисний припустимий розв'язок є оптимальним. У табл.11, у рядку для s_1, є два додатних елемента: 5 і 6. Ці елементи знаходяться в стовпцях для y_2 і y_3. Генеральний елемент можна вибрати як у стовпці для y_2, так і в стовпці для y_3. Для визначеності візьмемо стовпець для y_3, у якому знаходиться найбільший з вищевказаних додатних елементів: 6. Тоді цей стовпець буде називатися *ведучим стовпцем* (у табл.11 він позначений стрілкою нагору);

б) тепер складаємо відношення вільних членів у рядках, відповідних базисним невідомим, до додатних елементів у ведучому стовпці: 2:2=1 , 5:3=5/3. Із цих відношень найменшим є перше, відповідне рядку для базисного невідомого y_4. Цей рядок і називається *ведучим рядком* (у табл. 11 вона позначена стрілкою вліво). Елемент **2**, що знаходиться на перетині ведучого стовпця і ведучого рядка, і є *генеральний елемент*.

Примітка 3.1. Якщо у ведучому стовпці немає додатного елемента, то це означає, що форма s_1 (s) не обмежена знизу (зверху). Отже, дана задача лінійного програмування не має розв'язку.

Примітка 3.2. Вище описаний спосіб визначення ведучого рядка забезпечує те, що, якщо y_4 буде вільним, а y_3 базисним невідомим, то ми знову одержимо базисний припустимий розв'язок.

Н а с т у п н и м етапом переходу до іншої симплекс-таблиці є заповнення нижніх чарунків табл. 11 за правилами:

а) знаходимо величину $\lambda = 1/2$, обернену генеральному елементу, і вносимо її в нижню чарунку клітини, що містить генеральний елемент;

б) помножимо на λ всі елементи з верхніх чарунок ведучого рядка (крім генерального елемента) і помістимо отримані добутки у відповідні нижні чарунки цього ж рядка;

в) помножимо на - λ всі елементи з верхніх чарунок ведучого стовпця (крім генерального елемента) і помістимо отримані добутки у відповідні нижні чарунки цього ж стовпця;

г) виділимо яким-небудь способом (у даних методичних вказівках - напівжирним підкресленим шрифтом) числа, що розташовані у верхніх чарунках ведучого рядка і в нижніх чарунках ведучого стовпця;

д) числа, що внесені в нижні чарунки інших клітин, знаходимо, перемноживши відзначені числа з рядка і стовпця, що відповідають даній клітині.

Н о в у симплекс-таблицю 12 отримуємо зі старої симплекс-таблиці 11 за такими правилами:

а) у верхні чарунки ведучого рядка і ведучого стовпця помістимо числа з нижніх чарунок;

б) у верхню чарунку кожної з інших клітин помістимо число, що дорівнює сумі чисел з верхньої і нижньої чарунки відповідної клітини табл. 11.

Таким чином, отримана нова симплекс-таблиця 12, що відповідає базисному припустимому розв'язку (0;0;1;0;2;2) зі значенням $s_1 = -s = -6$:

Т а б л и ц я 12

Вільн. невід. Баз.невід.	Вільні члени	y_1	y_2 ↑	y_4
s	6 4	1 -2	-2 **4**	3 2
s_1	-6 -4	-1 2	2 **-4**	-3 -2
y_3 ←	**1** 2	**-1/2** -1	**1/2** λ=2	**½** 1
y_5	2 9	½ -9/2	-5 **9**	½ 9/2
y_6	2 1	5/2 -1/2	1 **1**	-3/2 1/2

Рядок для s_1 (вільний член не враховується!) у симплекс-таблиці 12 містить додатний елемент у стовпці для y_2. Тому оптимальний розв'язок не досягнутий і стовпець для y_2 є ведучим. Дослівно повторюючи вищенаведену симплекс-процедуру, здійснимо перехід до наступної симплекс-таблиці 13.

Т а б л и ц я 13

Вільн. невід. Баз.невід.	Вільні члени	y_1 ↑	y_3	y_4
s	*10* *3/2*	*-1* ***1/2***	*4* *1/2*	*5* *-1/2*
s_1	*-10* *-3/2*	*1* ***-1/2***	*-4* *-1/2*	*-5* *1/2*
y_2	*2* *3/2*	*-1* ***1/2***	*2* *1/2*	*1* *-1/2*
y_5	*11* *6*	*-4* ***2***	*9* *2*	*5* *-2*
y_6 ←	***3*** *3/2*	***2*** *λ=1/2*	***1*** *1/2*	***-1*** *-1/2*

Рядок для s_1 (вільний член не враховується!) у симплекс-таблиці 13 знову містить додатний елемент у стовпці для y_1. Тому оптимальний розв'язок не досягнутий і стовпець для y_1 є ведучим. Використовуючи симплекс-процедуру, здійснимо перехід до наступної симплекс-таблиці 14:

Т а б л и ц я 14

Вільн. невід. / Баз.невід.	Вільні члени	y_6	y_3	y_4
s	23/2	1/2	9/2	9/2
s_1	-23/2	-1/2	-9/2	-9/2
s_2	7/2	½	5/2	½
s_5	17	2	11	3
s_6	3/2	½	1/2	-1/2

Рядок s_1 у табл. 14 не містить додатних елементів: базисний припустимий розв'язок (3/2;7/2;0;0;17;0) оптимальний і $s_{1\min}= - s_{\max}= - 23/2$. Отже розв'язком задачі (27) є $y_1=3/2$, $y_2=7/2$, $y_3=0$, $s_{\max}= 23/2$.

Тепер вирішимо вихідну задачу (26). Відповідно до двоїстого симплекс - методу (див., напр.,[4]) розв'язок задачі (26) можна одержати з «оптимальної» табл. 14 задачі (27). Для цього складемо таблицю всіх невідомих (основних і знову введених) і їхніх коефіцієнтів у лінійній формі s , узятих з табл. 14:

Т а б л и ц а 15

y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
0	**0**	**9/2**	**9/2**	**0**	**½**

Коефіцієнти при знову введених невідомих y_4 , y_5 , y_6 з табл. 15 і є суть оптимальні значення відповідно невідомих x_1 , x_2 , x_3 у задачі (26).

Таким чином, розв'язок задачі (26) представляється у вигляді

$$x_1 =9/2,\ x_2 =0,\ x_3 =1/2\ , \quad f_{\min} = s_{\max} = 23/2.$$

Приклад 3.2. Розв'язати матричну гру в змішаних стратегіях із платіжною матрицею, що наведена в табл. 16:

Т а б л и ц я 16

С. втор. гр. / С. перш.игр.	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	3	4	2
A_2	3	4	6	5
A_3	2	5	1	3

Розв'язання. Для знаходження оптимальних стратегій гравців складемо пару двоїстих задач (20) і (22):

$$\begin{cases} f = u_1 + u_2 + u_3 \to \min, \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0, \\ 4u_1 + 3u_2 + 2u_3 \geq 1, \\ 3u_1 + 4u_2 + 5u_3 \geq 1, \\ 2u_1 + 6u_2 + u_3 \geq 1, \\ 2u_1 + 5u_2 + 3u_3 \geq 1. \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} s = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 \to \max, \\ v_1, v_2, v_3, v_4 \geq 0, \\ 4v_1 + 3v_2 + 4v_3 + 2v_4 \leq 1, \\ 3v_1 + 4v_2 + 6v_3 + 5v_4 \leq 1, \\ 2v_1 + 5v_2 + v_3 + 3v_4 \leq 1. \end{cases} \tag{33}$$

Як було відзначено вище, зручно спочатку вирішити задачу (33), яку аналогічно (31) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} s_1 = -s = 0 - (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) \to \min, \\ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7 \geq 0, \\ v_5 = 1 - (4v_1 + 3v_2 + 4v_3 + 2v_4), \\ v_6 = 1 - (3v_1 + 4v_2 + 6v_3 + 5v_4), \\ v_7 = 1 - (2v_1 + 5v_2 + v_3 + 3v_4). \end{cases}$$

Подальший хід розв'язання (див. табл. 17 - 19) цієї задачі наводимо без коментарів, тому що він цілком повторює хід розв'язання задачі (27):

Т а б л и ц я 17

Вільн. невід. / Б.невід.	Вільні члени	v_1 ↑	v_2	v_3	v_4
s	0 / 1/4	-1 / **<u>1/4</u>**	-1 / 3/4	-1 / 1	-1 / ½
s_1	0 / -1/4	1 / **<u>-1/4</u>**	1 / -3/4	1 / -1	1 / -1/2
v_5 ←	**<u>1</u>** / 1/4	**<u>4</u>** / λ=1/4	**<u>3</u>** / 3/4	**<u>4</u>** / 1	**<u>2</u>** / 2/4
v_6	1 / -3/4	3 / **<u>-3/4</u>**	4 / -9/4	6 / -3	5 / -6/4
v_7	1 / -2/4	2 / **<u>-2/4</u>**	5 / -6/4	1 / -2	3 / -1

Т а б л и ц я 18

Вільн. невід. / Б.невід.	Вільні члени	v_5	v_2	v_3	v_4 ↑
s	¼ / 1/28	1/4 / -3/28	-1/4 / 1/4	0 / 6/14	-1/2 / **<u>2/14</u>**
s_1	-1/4 / -1/28	-1/4 / 3/28	1/4 / -1/4	0 / -6/14	½ / **<u>-2/14</u>**
s_1	¼ / -1/28	1/4 / 3/28	3/4 / -1/4	1 / -6/14	2/4 / **<u>-2/14</u>**
s_6 ←	**<u>¼</u>** / 1/14	**<u>-3/4</u>** / -3/14	**<u>7/4</u>** / 1/2	**<u>3</u>** / 12/14	**<u>14/4</u>** / λ=4/14
s_7	2/4 / -2/14	-2/4 / 6/14	14/4 / -1	-1 / -24/14	2 / **<u>-8/14</u>**

Т а б л и ц я 19

Вільн. невід. / Б.невід.	Вільні члени	v_5	v_2	v_3	v_6
s	8/28	4/28	0	6/14	2/14
s_1	-8/28	-4/28	0	-6/14	-2/14
v_1	6/28	10/28	½	8/14	-2/14
v_4	1/14	-3/14	½	12/14	4/14
v_7	10/28	-2/28	10/4	-38/14	-8/14

Рядок для s_1 у табл. 19 не містить додатних елементів, тому симплекс-таблиця 19 "оптимальна" і

$$v_1^* = \frac{3}{14}, \quad v_2^* = 0, \quad v_3^* = 0, \quad v_4^* = \frac{1}{14}, \quad s_{\max} = -\, s_{1\min} = \frac{2}{7}.$$

Тоді, за формулами (23) можна обчислити компоненти оптимальної стратегії y^* другого гравця і ціну гри:

$$y_1^* = \frac{v_1^*}{s_{\max}} = \frac{3}{14} : \frac{2}{7} = \frac{3}{4}, \quad y_2^* = 0, \quad y_3^* = 0, \quad y_4^* = \frac{1}{14} : \frac{2}{7} = \frac{1}{4}, \quad Z^0(\Gamma) = \frac{1}{s_{\max}} = \frac{7}{2}.$$

Для одержання розв'язку задачі (33) за допомогою двоїстого симплекс-методу (див. розв'язання прикладу 3.1) складемо табл. 20, аналогічну табл. 15:

Т а б л и ц я 20

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
0	**0**	**6/14**	**0**	**4/28**	**2/14**	**0**

Тоді з табл. 20 одержимо розв'язок задачі (32):

$$u_1^* = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}, \quad u_2^* = \frac{2}{14} = \frac{1}{7}, \; u_3^* = 0. \;\; f_{\min} = s_{\max} = \frac{2}{7}.$$

Використовуючи цей результат, з формул (21) знайдемо компоненти оптимальної стратегії x^* першого гравця:

$$x_1^* = \frac{u_1^*}{f_{\min}} = \frac{1}{7} : \frac{2}{7} = \frac{1}{2}, \quad x_2^* = \frac{1}{2}, \quad x_3^* = 0, \quad Z_0(\Gamma) = \frac{1}{f_{\min}} = \frac{7}{2}.$$

Таким чином, розв'язком матричної гри є оптимальні стратегії гравців x^* =(1/2, 1/2, 0), y^*=(3/4, 0, 0, 1/4) і при цьому ціна гри (підсумковий виграш першого гравця) дорівнює 7/2.

3.Варіанти індивідуального завдання. Розв'язати матричну гру в змішаних стратегіях з платіжною матрицею першого гравця, що наведена в табл. 3 чи 4 з §1.

Оцінювання виконання практичних робіт

Перелік припущених недоліків, що знижують оцінку якості виконання практичної роботи:

● повнота відповідності звіту про виконання практичної роботи методичним рекомендаціям;

● ступінь володіння теоретичним матеріалом щодо предмету вивчення;

● загальна та професійна грамотність, лаконізм і логічна послідовність викладу матеріалу;

● відповідність оформлення звіту чинним стандартам.

При захисті практичних робіт на «відмінно» оцінюється відповідь, якщо при відповіді на питання студент виявив знання та уміння у повному обсязі виконувати завдання та знання з додаткової літератури на рівні творчого їх використання. Розв’язання задачі, яка претендує на оцінку «відмінно», повинно бути методично правильним з належними поясненнями і обґрунтуваннями.

Оцінка «добре» виставляється, якщо при відповіді на питання студент виявив знання та уміння відповісти за програмним матеріалом на рівні аналітичного відтворення. У даному разі відповідь повинна бути в цілому правильною, але може мати окремі неточності, системне розуміння матеріалу.

«Задовільно» – виставляється, якщо при відповіді на питання студент виявив знання та уміння відповісти за програмним матеріалом на рівні репродуктивного відтворення.

Оцінка «Незадовільно» виставляється, якщо при відповіді на питання студент виявив серйозні пробіли в знаннях основного матеріалу, допустив принципові помилки при виконанні завдання на рівні нижче репродуктивного відтворення.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вентцель Е. С. Исследование операций. – М.: Советское радио, 1972. – 552 с.

2. Дюбин Г.Н. Введение в прикладную теорию игр./ Г.Н. Дюбин, В.Г.Суздаль. – М.: Наука, 1981. – 336 с.

3. Карпелевич Ф. И., Садовский Л. Е. Элементы линейной алгебры и линейного программирования. – М.: Наука, 1967. – 312с.

4. Кузнецов Ю.Н. Математическое программирование./ Ю.Н. Кузнецов, В.И. Кузубов, А.Б. Волощенко – М.: Высшая школа, 1976. – 352 с.

5.Макаров И.М. Теория выбора и принятия решений./ И.М. Макаров., Т.М.Виноградская, А.А. Рубчинский, В.Ю. Соколов– М.: Наука, 1982. – 328 с.

Когут Петро Ілліч
Кучерява Марія Анатоліївна

МЕТОДИ І АЛГОРИТМИ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ. МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ДО ПРАКТИЧНИХ РОБІТ ДЛЯ СТУДЕНТІВ ДЕННОЇ ТА ЗАОЧНОЇ ФОРМ НАВЧАННЯ НАПРЯМУ ПІДГОТОВКИ 0701 ТРАНСПОРТНІ ТЕХНОЛОГІЇ

Підписано до друку . Формат 30x42/4.
Папір офсетний. Ризографія. Ум. друк. арк.
Обл.-вид. арк. Тираж 80 прим. Зам. №

Державний ВНЗ «НГУ»
49005, м. Дніпропетровськ, просп. К. Маркса, 19